MASTER 2 Sciences, Technologies, Santé

Mention Mathématiques

Parcours Recherche

En co-accréditation avec l'Université d'Artois et

avec l'Université Polytechnique Hauts-de-France

Année universitaire 2024 – 2025

Laboratoire Paul Painlevé - Université de Lille (CNRS UMR 8524)
Laboratoire de Mathématiques de Lens - Université d'Artois (UR 2462)
Laboratoire de Matériaux Céramiques et de Mathématiques CERAMATHS – Département DMTHS - UPHF

https://sciences-technologies.univ-lille.fr/les-departements-de-formation/mathematiques/

RESPONSABLE LILLE — *Mylène MAIDA*
mylene.maida@univ-lille.fr
Université de Lille
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Mathématiques
59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

SECRETARIAT — *Stéphanie NINIVE*
math-masters2@univ-lille.fr
Tel. 03.20.43.42.33

RESPONSABLE VALENCIENNES

Serge NICAISE
Université Polytechnique Hauts-de-France
CERAMATHS/DMATHS - Abel de Pujol 2
Le Mont Houy
59313 VALENCIENNES Cedex 9

SECRETARIAT

Fatiha Meziane
fatiha.meziane@uphf.fr
Tel. 03.27.51.19.01

RESPONSABLE LENS-ARTOIS

Yaël FREGIER
Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Rue J. Souvraz, SP 18
F-62307 LENS CEDEX

OBJECTIFS

Le Master Mathématiques offre une formation approfondie en mathématiques et fournit un bagage solide et de haut niveau en mathématiques. Le parcours Recherche permet l'acquisition de connaissances approfondies dans des thématiques de recherche contemporaines en mathématiques. Les choix des cours proposés permettent aux étudiants de bénéficier d'un premier contact avec des problématiques de recherche en mathématiques, allant des mathématiques pures jusqu'aux mathématiques appliquées.

La formation est centrée sur les cinq domaines des mathématiques pures et appliquées représentés dans les laboratoires :

- *Analyse*
- *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles*
- *Arithmétique et géométrie algébrique*
- *Géométrie et topologie*
- *Probabilités et statistiques*

Le parcours recherche fait partie du programme gradué "Information and Knowledge Society" (GP-IKS) : http://www.isite-ulne.fr/index.php/fr/programme-gradue-information-and-knowledge-society-etudiant/

DEBOUCHES

Le parcours Recherche s'inscrit principalement dans le monde de la recherche et de l'enseignement. Il prépare aux fonctions d'enseignant et de chercheur. Par sa poursuite en doctorat, le Master permet d'envisager une carrière d'enseignant-chercheur en Mathématiques dans l'enseignement supérieur, ou de chercheur dans un laboratoire de recherche public (CNRS, INRIA, etc) ou privé et, plus généralement, dans des sociétés de services ayant besoin de mathématiciens.

Pour préparer une thèse de doctorat :

Un nombre limité de contrats doctoraux de 3 ans peuvent être établis. Leurs sources de financement sont : Allocations de recherche du Ministère, bourse du LABEX CEMPI, bourses CNRS, bourses de la Région, bourses CIFRE, bourses financées par des programmes institutionnels. Une rémunération complémentaire pour service d'enseignement peut également être envisagée.

Candidature : Les règles du concours d'attribution des allocations de thèse et le dossier à télécharger se trouvent sur le site de l'Ecole Doctorale MADIS (https://edmadis.univ-lille.fr/). L'étudiant choisit un sujet de thèse (la liste se trouvant sur les sites web des laboratoires), se met en contact avec un directeur de thèse et lui adresse un dossier complet (cf calendrier en ligne).

BOURSES

Vous pouvez candidater aux bourses d'excellence proposées par le programme gradué GP-IKS. La procédure de candidature est précisée sur la page web du GP : https://international.univ-lille.fr/en/graduate-programmes/information-and-knowledge-society/

Il y a deux appels par an pour ces bourses, en mars et en juin.

ADMISSIONS

PHASE 1 : CANDIDATURE (PRÉ-REQUIS ET PUBLIC CONCERNÉ)

S'agissant des étudiants ayant validé le master 1 de la mention Mathématiques de l'Université de Lille, l'accès au master 2 Mathématiques parcours Recherche est de droit ; il vous appartiendra donc de procéder directement à votre inscription administrative (cf phase 2).

S'agissant des étudiants ayant validé un autre master 1 d'un parcours national de master dans une mention compatible (Mathématiques fondamentales ou appliquées) ou un diplôme à l'étranger (hors procédure Campusfrance), l'accès en master 2 Mathématiques parcours Recherche se fait par sélection sur dossier, suivi le cas échéant d'un entretien de motivation. Toute candidature doit passer par la plateforme ecandidat :

https://ecandidat.univ-lille.fr/

PHASE 2 : INSCRIPTION

Une fois que la décision d'acceptation dans la formation a été notifiée, l'inscription administrative se fait au début de l'année universitaire (le calendrier est en ligne sur le site de l'université de Lille : https://www.univ-lille.fr/etudes/candidater-sinscrire/) auprès des services administratifs de l'université.

Elle sera complétée, à la rentrée, par l'inscription pédagogique qui permet d'établir le contrat pédagogique de chaque étudiant et de l'inscrire aux examens correspondants (se rapprocher du secrétariat pédagogique).

SEMESTRE 3

BCC Maîtriser les concepts des mathématiques (Niveau approfondi 2) (Choix de 3 UE fondamentales parmi 7 dont au plus une UE de méthodes numériques)	*Algèbre approfondie*	*9 ECTS*
	Analyse approfondie	*9 ECTS*
	Géométrie approfondie	*9 ECTS*
	Introduction aux EDP non-linéaires	*9 ECTS*
	Probabilités approfondies	*9 ECTS*
	Méthodes numériques pour les EDP	*9 ECTS*
	Méthodes numériques pour les Probas-Stats	*9 ECTS*
BCC S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel	*Séminaire d'étudiants en anglais*	*3 ECTS*

SEMESTRE 4

BCC S'initier à la recherche dans le domaine des mathématiques (Choix de 2 UE parmi 7)	*Cours approfondi de mathématiques pures 1*	*9 ECTS*
	Cours approfondi de mathématiques pures 2	*9 ECTS*
	Cours approfondi de mathématiques pures 3	*9 ECTS*
	Cours approfondi en analyse numérique et EDP 1	*9 ECTS*
	Cours approfondi en analyse numérique et EDP 2	*9 ECTS*
	Cours approfondi en probabilités et statistiques 1	*9 ECTS*
	Cours approfondi en probabilités et statistiques 2	*9 ECTS*
BCC S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel	*Mémoire de recherche (possibilité de faire un stage en plus du mémoire)*	*12 ECTS*

PROGRAMME DES COURS

2024 - 2025

- *S3 : Algèbre approfondie – 36h de CM et 12h de TD*

Programme
Le sujet principal de ce cours est l'algèbre commutative, c'est-à-dire la théorie des anneaux et ses applications. Les deux tiers du cours seront consacrés à l'étude des notions et structures fondamentales du domaine. Le tiers restant sera consacré à des thèmes d'approfondissement ou à des applications. Le plan ci-dessous fourni une liste de sujets d'approfondissement possibles. Ces approfondissements pourront être traités en cours ou faire l'objet d'exposés d'étudiants. Les choix seront faits en fonction des projets des étudiants. Il s'agira de faire la jonction avec les cours du second semestre ou d'apporter des compléments de connaissances.

- *Notions fondamentales*
  - *Anneaux et idéaux*
    – Définition de la structure et exemples (révisions et compléments), anneaux principaux et euclidiens, anneaux factoriels.
    – Anneaux noethériens. Le théorème de la base de Hilbert
    – Idéaux premiers et maximaux. Dimension de Krull d'un anneau
  - *Modules sur les anneaux*
    – Définition de la structure et exemples. Opérations sur les modules. Modules noethériens
    – Présentation des modules par générateurs et relations. Syzygies et résolutions
    – Classification des modules de type fini sur un anneau principal
  - *Anneaux et modules de fractions, localisation*
- *Thèmes d'approfondissement*
  - *Bases de Gröbner et méthodes effectives dans les anneaux de polynômes. Algorithme de Buchberger. Applications au calcul des syzygies*
  - *Introduction à la géométrie algébrique. Nullstellensatz. Faisceaux et variétés algébriques. Etude des ´ courbes algébriques*
  - *Etude des anneaux d'entiers de corps de nombres. Structure d'anneau de Dedekind. Unités et groupes de classes d'idéaux dans les anneaux d'entiers de corps de nombres*
  - *Nombres p-adiques. Construction. Lemme de Hensel. Groupe des unités. Théorème d'Hasse-Minkowski et principe local-global.*
  - *. . .*

Bibliographie
[1] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald. Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley publishing co., 1969.

[2] D. Eisenbud. Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, 2004.

[3] W. Fulton. Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry. W.A. Benjamin inc., 1969.

[4] D. Perrin. Géométrie algébrique. Une introduction. Savoirs Actuels. InterEditions, Paris. CNRS Editions, Paris, 1995.

[5] P. Samuel. Théorie algébrique des nombres, Hermann, Paris, 1967.

[6] J.-P. Serre. Cours d'arithmétique. Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) seront précisées en début de semestre. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1, (Ex1+CC)/2).

- *S3 : Analyse approfondie – 36h de CM et 12h de TD*

Programme

- ➢ *Partie I (24h CM - 8h TD)*

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :

- *Convergence faible (et préfaible) dans le cadre des espaces de Banach, exemple des mesures complexes comme dual de C(K) (théorème de Riesz).*
- *Réflexivité, étude d'exemples classiques (espaces de suites, espaces Lp).*
- *Espaces de Fréchet, exemples de C∞(Ω), Hol(Ω), S(Rn), distributions, etc.*
- *Théorème de Paley-Wiener (Fourier complexe).*
- *Equations différentielles complexes et fonctions spéciales.*
- *Fonctions harmoniques.*
- *Espaces de Hilbert de fonctions analytiques sur un ouvert de C ou Cn, noyau reproduisant, exemples (Hardy, Bergman, Dirichlet).*
- *Opérateurs sur les espaces de Hilbert, opérateurs à noyau, compacts.*
- *Valeurs propres et singulières des opérateurs.*
- ➢ *Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.*

Bibliographie

[1] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications, Masson.
[2] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer.
[3] J. Cerda, Linear Functional Analysis, gsm 116, AMS.
[4] F. Hirsch, G. Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle, Dunod.
[5] W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw Hill.
[6] D. Li, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, Ellipses.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) seront précisées en début de semestre. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1, (Ex1+CC)/2).

- *S3 : Géométrie approfondie – 36h de CM et 12h de TD*

Programme

- ➢ *Partie I (24h CM - 8h TD)*

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :

- *Sous-variétés de Rn.*
- *Variétés abstraites.*
- *Constructions de variétés (affines, projectives, actions de groupes).*
- *Formes différentielles sur les variétés. Différentiation. Lemme de Poincaré.*
- *Intégration des formes différentielles. Formule de Stokes.*
- *Lemme de Sard, degré.*
- *Fibrés vectoriels. Classification des fibrés sur S1 et S2.*
- *Cohomologie de de Rham.*
- *Indices des champs de vecteurs et nombre d'Euler. Formule de Hopf.*
- ➢ *Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.*

Bibliographie

[1] Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, EDP Sciences 2010.
[2] Godbillon, Eléments de topologie algébrique, Hermann 1998.
[3] Chavel, Riemannian Geometry : a modern introduction, Cambridge University Press 2006.
[4] Bott-Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer 1982.
[5] Hirsch, Differential Topology, Springer, 1976.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) seront précisées en début de semestre. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- *S3 : Introduction aux EDP non-linéaires – 36h de CM et 12h de TD*

Programme

- *Espaces de Sobolev*
  Inégalité de Poincaré. Théorèmes de trace et de recollement. Formule de Green. Injections de Sobolev. Théorème de Rellich.
- *Etude théorique de problèmes elliptiques*
  Théorème de Lax-Milgram, formulation variationnelle. Principe du maximum, régularité. Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur elliptique. Méthode de sur et sous solutions.
- *Problèmes paraboliques*
  Existence et unicité. Principe du maximum, régularité. Méthode de sur et sous solutions.
- *Théorèmes de point fixe Thormes de Banach, Brouwer et Schauder.*
  Applications aux EDP non linéaires.
- *Equations de transport Solutions classiques, solutions faibles.*
  Méthode des caractéristiques, solutions entropiques. Résolution du problème de Riemann. Application à l'équation de Burgers et au trafic routier.

Bibliographie

[1] R. Adams, J. Fournier, Sobolev spaces (second edition), Elsevier.
[2] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V. 19.
[3] M. E. Taylor, Partial Differential Equations I, II, III Applied Mathematical Sciences.
[4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Application, Dunod Université.
[5] D. Serre, Systèmes de lois de conservation, tomes i et ii, Cassini, 1996.
[6] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) seront précisées en début de semestre. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- *S3 : Probabilités approfondies – 36h de CM et 12h de TD*

Programme

- *Processus stochastiques : théorème de Kolmogorov (admis), processus gaussiens, mouvement brownien, modification continue, propriétés des trajectoires.*
- *Introduction aux équations différentielles stochastiques : intégrale de Wiener, exemples simples d'EDS.*
- *Processus de Markov à sauts en temps continu : générateur, liens avec les chaînes de Markov, processus de Poisson, files d'attente.*
- *Inégalités de concentration : inégalités de Chernoff, Hoeffding, Bernstein, etc, applications.*
- *Grandes déviations : théorème de Cramer, principe de grandes déviations.*

Bibliographie

[1] Bouleau, Processus Stochastiques et applications, Hermann.
[2] Claude Dellacherie, Pierre-Andre Meyer. Probabilités et potentiels. Hermann, 1975.
[3] D. Revuz et M. Yor, Continuous Martingales and Brownian motion, Springer.
[4] Karatzas et Shreeve, Brownian motion and stochastic calculus, Springer.
[5] I Florescu et C. Tudor, Handbook of Probability, Wiley.

Evaluation

Le contrôle continu (CC) sera un examen partiel de 2h. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- *S3 : Méthodes numériques pour les EDP - 20h de CM et 46h de TD*

Programme
Cette unité pédagogique est constituée de deux modules : Outils informatiques en en calcul scientifique et Finite elements methods.

- *Partie I (36h TD) : Outils informatiques en calcul scientifique*
- *Prise en main de python : rappels et compléments.*
- *Résolution de systèmes linéaires : méthodes directes, méthodes itératives.*
- *Méthodes de calcul de valeurs propres-vecteurs propres.*
- *Résolution d'équations non linéaires.*
- *Résolution approchée de l'équation de la chaleur.*
- *Différences finies pour l'approximation d'une équation elliptique 1D.*
- *Différences finies pour la résolution approchée de l'équation de la chaleur.*

- *Partie II (18h CM – 13h TD) : Finite elements methods*
  Description
  This course is concerned with the theoretical and practical aspects of the numerical approximation of elliptic/parabolic PDEs using Finite Element Methods.

  Contents
  - Mathematical pre-requisites: Hilbertian analysis and convex optimization; Sobolev spaces (trace theorem, duality, Poincaré inequalities)
  - Variational formulation of elliptic PDEs: strong/weak solutions; well-posedness (coercive case); essential/natural boundary conditions
  - Variational approximation of elliptic problems: internal approximation; matricial viewpoint; Céa's lemma; general convergence theorem
  - Finite elements: definition of a FE (unisolvence, shape functions); reduction/reconstruction/interpolation operators; stiffness/mass matrices
  - Lagrange FE in 1D: algebraic realization (quadrature formulas, static condensation); convergence theorems (interpolation, duality techniques)
  - Lagrange FE in 2D/3D: barycentric coordinates; algebraic realization (assembly procedure, cubature formulas); convergence theorems (interpolation, mesh regularity)
  - Implementation of 1D Lagrange FE in Matlab/Octave
  - Approximation of parabolic problems: diagonalization of the heat operator; Euler/FE time/space schemes; convergence theorems; algebraic realization (CFL condition, mass lumping)
  - Project in C/C++ (2D, use of Gmsh)

Bibliographie
[1] G. Golub et C. Van loan : Matrix Computations, Johns Hopkins University Press
[2] G. Allaire et S.M. Kaber : Algèbre Linéaire Numérique. Cours et exercices, Paris Ellipses
[3] J.P. Demailly : Analyse Numérique et Equations Différentielles, EDP Sciences, Eyrolles
[4] P. Lascaux et R. Théodor : Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur, Dunod
[5] J.-B. Hiriart-Urruty : Optimisation et Analyse Convexe (résumé de cours, exercices et problèmes corrigés), editions EDP Sciences
[6] L. Di Menza : Analyse Numérique des Equations aux dérivées partielles, Cassini
[7] B. Lucquin : Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ellipses
[8] E. Hubert et J. Hubbard : Calcul Scientifique, Vuibert
[9] J.-E. Rombaldi : Interpolation et Approximation (cours et Exercices Résolus), Vuibert
[10] A. Quarteroni, P. Gervasio, F. Saleri: Calcul Scientifique (cours et exercices corrigés), Springer
[11] W. Gautschi: Numerical Analysis, BirkhäuserT. Gordon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul Scientifique, ISTE Editions

[12] G. Allaire : Numerical Analysis and Optimisation, Oxford University Press

Evaluation

Pour la partie I, le contrôle continu (CC) sera constitué d'évaluations de projets tout au long du semestre. L'examen final (Ex1) durera 3h et la note de l'EC sera (Ex1+CC)/2.

Pour la partie II, l'évaluation se fera sur la base d'un examen final écrit de 3h (EXA) et d'un projet à réaliser en autonomie (PRO). La note de l'EC sera 1/3*EXA+2/3*PRO.

La note de l'UE sera la moyenne des deux notes.

- *S3 : Méthodes numériques pour les Probas-Stats - 20h de CM et 56h de TD*

Programme
Cette unité pédagogique est constituée de deux modules : Outils informatiques en Proba-Stats et Théorie de l'apprentissage.

- ➢ *Partie I (36h TD) : Outils informatiques en Proba-Stats*
- *Estimation paramétrique, intervalle de confiance.*
- *Méthodes de Monte-Carlo.*
- *Fonction de répartition empirique.*
- *Processus de Poisson.*
- *Chaînes de Markov.*

- ➢ *Partie II (20h CM – 20h TD) : Théorie de l'apprentissage*
  L'objectif de ce cours est de savoir calculer des bornes sur les risques théoriques des méthodes d'apprentissage.
- *Rappel sur les inégalités de concentration*
- *Risque théorique et empirique en apprentissage*
- *Nombres de croissance et dimension de Vapnik-Chervonenkis*
- *Complexité de Rademacher*
- *Nombres de couverture et dimension de pulvérisation*

Bibliographie
[1] Processus de Markov et Applications. Algorithmes, réseaux, génome et finance. Etienne Pardoux.
[2] Exercice de probabilités : Licence - Master - Ecole d'ingénieurs. Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre.
[3] Statistique mathématique en action. Vincent Rivoirard et Gilles Stoltz.

Evaluation
La partie I sera évaluée par un examen final de 3h. La partie II également. La note de l'UE est la moyenne des deux notes.

- *S3 : Séminaire d'étudiants en anglais – 24h de TD*

Programme
Le séminaire d'étudiants comprend des séances en Anglais basées sur la lecture de livres de mathématiques ou d'articles de recherche. Les étudiants sont amenés à faire des exposés en Anglais.
Evaluation
L'évaluation sera basée sur un exposé et un mémoire en anglais rendu pendant le semestre.

- *S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 1 : Théorie des représentations des groupes - 32h de CM et 8h de TD*

Objectif

Les représentations des groupes vivent à l'intersection entre la théorie des groupes—le domaine abstrait de la symétrie—et l'algèbre linéaire avec son efficacité de calcul. La théorie qui en résulte est vaste et ses applications se trouvent dans de très nombreux domaines des mathématiques. Le but de ce cours est de fournir les notions et résultats fondamentaux de cette théorie désormais classique, en mettant l'accent sur les groupes finis. Le long du chemin, on fournira aussi des outils modernes essentiels issus de la théorie des modules, la théorie des catégories, l'algèbre homologique, etc. Il s'agit de notions indispensables à toute thèse en algèbre.

Prérequis

Idéalement l'étudiant.e aura suivi le cours d'algèbre approfondie du S3, mais ce n'est pas strictement nécessaire et de bases solides en algèbre linéaire et théorie des groupes suffisent.

Descriptif

Le cours touchera au moins aux points suivants : Représentations d'un groupe sur un corps ou un anneau commutatif. Modules sur l'algèbre du group. Induction et restriction, propriété d'adjonction. Produit tensoriel, dual, Hom interne, formule de Frobenius, formule de Mac- key. Propriété de Krull-Schmidt. La représentation régulière. Cas semi-simple : le théorème de Maschke. Théorie des charactères en charactéristique zéro. Théorème d'induction d'Artin. L'anneau des représentations, cas complexe et variantes. Comparaison avec les représentation par permutation et l'anneau de Burnside. Le cas modulaire (corps de charactéristique positive). Théorie de Brauer. Propriétés homologiques de la catégories des représentations, extensions.
Un ou deux châpitres ultérieurs seront choisis selon les intérêts des étudiants. Par exemple : groupes compacts ou infinis et leurs représentations unitaires ; groupe abéliens localement com- pacts et dualité de Pontriaguine ; le théorème de Burnside des deux premiers ; la catégorie stableet cohomologie des groupes ; la catégorie dérivée ; les correspondences de Brauer et de Green.

Références

[1] *Jean-Pierre Serre. Représentations linéaires des groupes (3ème ed.). Hermann (1978).*

[2] *David J. Benson. Representations and cohomology I : Basic representation theory of finite groups and associative algebras. Cambridge studies in advanced mathematics (1991).*

[3] *Jon F. Carlson. Modules and group algebras. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Bir- khäuser (1996).*

[4] *Tammo tom Dieck. Representation theory. Lecture notes Göttingen (2009).*

[5] *Emmanuel Kowalski. An introduction to the representation theory of groups. Graduate studies in mathematics of the AMS 155 (2014).*

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement

- *S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 2 : Arithmétique des courbes elliptiques - 32h de CM et 8h de TD*

Descriptif

L'objectif de ce cours est de donner une introduction à la géométrie arithmétique à travers l'étude des courbes elliptiques sur les corps de nombres (c'est-à-dire les corps qui sont des extensions finies de $\mathbb Q$). Un des buts sera de donner une preuve du :

Le groupe des points rationnels $E(K)$ d’une courbe elliptique E sur un corps de nombres K est un groupe abélien de type fini.

Pré-requis
Il semble préférable, même si pas strictement indispensable, d’avoir au préalable suivi le cours de théorie de Galois du S1 et le cours d’algèbre approfondie du S3.

On suivra essentiellement, tout en s’appuyant sur les classiques \cite{Mil} et \cite{Ser}.

Le plan (prévisionnel) est le suivant :

Variétés algébriques

- *Extensions de corps*
- *Espace affine*
- *Variétés affines*
- *Dimension*
- *Lissité*
- *Espace projectif*
- *Morphismes entre variétés affines*
- *Applications rationnelles entre variétés affines*
- *Morphismes entre variétés projectives*
- *Variétés complètes*

Courbes algébriques

- *Anneaux locaux*
- *Anneaux de valuation discrète*
- *Applications entre courbes*
- *Théorie de la ramification – résumé*
- *Diviseurs*
- *Différentielles*
- *Riemann-Roch*

Courbes elliptiques

- *Cubiques de Weierstrass*
- *Courbes elliptiques*
- *La loi de groupe*
- *Isogénies*

Réduction des courbes elliptiques

- *Rappels/conventions sur les complétés de corps de nombres*
- *Réduction des courbes elliptiques*
- *La filtration $\mathfrak p$-adique*

Le théorème de Mordell-Weil (faible)

- *Introduction*
- *Une réduction*
- *L’accouplement de Kummer*
- *Ramification et théorie de Galois*

Bibliographie :
- *D. Perrin : Géométrie algébrique : une introduction. Interéditions/CNRS Editions, 1995.*
- *I. R. Shafarevich : Basic algebraic geometry. 1. Varieties in projective space. Springer, 2013.*

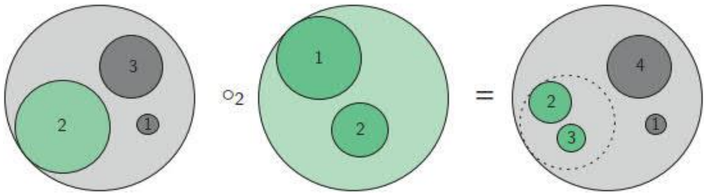
- G. Harder : Lectures on algebraic geometry I, II. Aspects of Mathematics, E35, E39. Vieweg,2011.
- N. Bourbaki : Algèbre homologique, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.

- *S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 3 : Operads, graph complexes and applications - 32h de CM et 8h de TD*



Le but de ce cours sera d'introduire les étudiants à des problématiques de recherche actuelles dans les domaines de l'algèbre et de la topologie.

Le premier concept qui interviendra dans le cours est donné par la notion d'opérade. Pour expliquer l'idée de cette notion, une opérade est un objet qui modélise la structure formée par des composées d'opérations qui gouvernent une structure d'algèbre. Les catégories d'algèbres usuelles, comme la catégorie des algèbres associatives, la catégorie des algèbres associatives et commutatives, la catégorie des algèbres de Lie, … peuvent être associées à des opérades. On a une notion de présentation par générateurs et relations pour les opérades qui reflète la définition classique de la structure d'algèbre associative, de la structure d'algèbre commutative, de la structure d'algèbre de Lie … en termes d'une opération génératrice (un produit, un crochet de Lie, …) vérifiant un ensemble de relations. Dans ce contexte, l'un des outils principaux de la théorie des opérades est la théorie de la dualité de Koszul qui est utilisée pour calculer les syzygies (les relations secondaires) associées à de telles présentations.

La définition des catégories usuelles d'algèbres et des opérades associées sera étudiée dans la première partie du cours. Ensuite, on se concentrera sur l'étude des opérades E_n: des exemples fondamentaux d'opérades qui sont utilisés pour modéliser des niveaux de commutativité qui gouvernent certaines structures d'algèbre.

Puis on expliquera une construction de complexes de graphes dans le but de calculer des groupes d'automorphismes associés aux opérades E_n. Pour conclure le cours, on esquissera des applications des complexes de graphes dans une interprétation opéradique du groupe de Grothendieck-Teichmüller (un groupe, défini en utilisant des idées du programme de Grothendieck en théorie de Galois, qui modélisent des symétries universelles de groupes quantiques), ou des applications des complexes de graphes pour le calcul de l'homotopie des espaces de nœuds/des espaces de plongements de variétés sur les rationnels.

Synopsis

Les catégories d'algèbres classiques et les opérades associées
La dualité de Koszul des algèbres. La dualité de Koszul des opérades
Les modèles des opérades E_n en topologie, en algèbre et en théorie des catégories
Les complexes de graphes et les automorphismes homotopiques des opérades E_n
Des applications : l'interprétation opéradique du groupe de Grothendieck-Teichmüller ;

l'homotopie des espaces de nœuds/des espaces de plongements de variétés

Prérequis : notions fondamentales d'algèbre ; notions fondamentales de topologie algébrique (homologie et homotopie)

Références

1. *B. Fresse, Homotopy of operads and Grothendieck-Teichmüller groups, Mathematical surveys 272, American Mathematical Society, 2017*
2. *J.-L. Loday, B. Vallette, Algebraic operads, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 346, Springer-Verlag, 2012.*
3. *T. Willwacher, M. Kontsevich's graph complex and the Grothendieck-Teichmüller Lie algebra, Invent. Math. 200 (2015), no. 3, pp. 671–760.*
4.

Evaluation : Pour les étudiants qui voudront valider le cours dans le cadre d'un diplôme de master 2, l'évaluation sera basée sur un exposé et un examen final qui aura lieu après la fin du cours (en présentiel uniquement). La note sera la moyenne des notes obtenues dans ces deux évaluations.

Site internet : https://pro.univ-lille.fr/benoit-fresse/enseignements/advanced-course-operads-graph-complexes-and-applications-2024-2025

- *S4 : Cours approfondi en analyse numérique et EDP 1 : Outils mathématiques pour l'information quantique- 32h de CM et 8h de TD*

Programme
Un ordinateur exploitant subtilement les principes de base de la mécanique quantique pourra être spectaculairement plus efficace qu'un ordinateur classique, comme l'ont démontré théoriquement Shor (1994) et Grover (1996), en proposant des algorithmes quantiques capables de factoriser un très grand nombre premier très rapidement ou de repérer très rapidement une donnée dans une très grande liste non-organisée. Ces résultats ont donné lieu à une nouvelle science, à la jonction de l'informatique, de la théorie de l'information et de la mécanique quantique : l'information quantique, qui englobe notamment la cryptographie quantique et le calcul quantique. Ses promesses, non totalement tenues pour l'instant, ont également attiré les investisseurs privés comme publics mondialement, vers la technologie quantique. Le but de ce cours est de fournir une introduction à quelques aspects de l'information quantique, en présentant notamment ses outils mathématiques. De ce point de vue, il s'agira d'un cours d'analyse, combinant analyse spectrale, analyse fonctionnelle, théorie des opérateurs et des algèbres d'opérateurs, ainsi que les probabilités. Le cours sera illustré avec des programmes en Qiskit, le "open source" de IBM qui permet de simuler des programmes quantiques. Les connaissances acquises en Licence et Master 1 dans ces disciplines suffiront comme prérequis et le cours s'inscrit aussi bien dans un parcours orienté vers les mathématiques pures que appliquées. Un polycopié sera mis à disposition.

Programme prévisionnel :

- *Eléments de la mécanique quantique (8h CM+2h TD)*
  - *Espace des états = espace de Hilbert*
  - *Observables = opérateurs auto-adjoints*
  - *Observables (in-)compatibles = opérateurs (ne) commutant (pas)*
  - *Principe d'incertitude = transforée de Fourier*
  - *Etats = opérateurs à trace positifs*
  - *Mélange statistique, états pures et mixtes = combinaison convexe, points extrémaux Systèmes composites = produits tensoriels*
  - *Dynamique = flot unitaire = équation de Schrödinger*
  - *Symétries = représentation unitaire de groupe*
  - *Mesure physique = projection*
- *Intrication (8h CM+2h TD)*
  - *Etats séparables et intriqués*
  - *Le théorème "no cloning" (Zurek, Wootters, Dieks 1982)*
  - *La décomposition de Schmidt*
  - *La purification = la représentation GNS*
  - *Mesures d'intrication bi-partites, entropies de von Neumann*

- Portes quantiques et algorithmes quantiques (10h CM + 2hTD)
    - Portes quantiques binaires, générales, universelles
    - Circuits quantiques
    - Cryptographie quantique : le protocole BB84
    - Algorithmes quantiques : Deutsch, Schor, Grover
- Opérations quantiques (6h CM+2hTD)
    - Application complètement positive sur un espace de Hilbert
    - Equation maîtresse quantique, générateur de Lindblad
    - Décohérence et approche à équilibre

Bibliographie

[1] [CTLD97] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Laloe, and Franck Diu. Mécanique Quantique I. Hermann, Paris, 1997.
[2] [GMS16] Ved Prakash Gupta, Prabha Mandayam, V.S. Sunder. The Functional Analysis of Quantum Information Theory. Springer, LNP, 2015, https://arxiv.org/pdf/1410.7188.pdf
[3] [Ha18] Masahito Hayashi. Quantum information theory : mathematical foundation Springer, 2017
[4] [NiCh00] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010.
[5] [RS75] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975
[6] [RS78] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
[7] [RS80] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. I. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second edition, 1980. Functional analysis.
[8] [S19] Wolfgang Scherer Mathematics of quantum computing. Springer, 2019

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement

- S4 : Cours approfondi en analyse numérique et EDP 2 : Ondes à la surface de l'eau - 32h de CM et 8h de TD

Il y a plus d'un siècle, John Scott Russell a observé une vague se déplaçant à vitesse constante à la surface d'un canal, en gardant sa forme initiale. Nous nous intéressons ici aux modèles mathématiques dispersifs pour les ondes à la surface de l'eau dans un canal peu profond et aux solutions particulières observées par JS Russel, les ondes progressives. Ces modèles pour ondes longues, dérivées des équations d'Euler, sont les modèles de type Korteweg-de Vries (KdV)

$u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0$,

ou la version régularisée de Benjamin, Bona et Mahony

$u_t + u_x - u_{txx} + uu_x = 0$.

L'équilibre subtil entre les eets dispersifs linéaires et les eets non linéaires permet l'existence de ces ondes voyageuses. Le cours d'analyse appliquée est organisé comme suit

• Nous discutons de la dérivation des modèles à partir des équations d'Euler.
• Nous traitons le problème de Cauchy pour ces équations, en mettant en évidence les outils dispersifs nécessaires pour analyser le problème.
• Nous nous concentrons sur l'existence et la stabilité des solutions dites ondes progressives pour ces équations.

Les connaissances préalables requises sont des notions de base en analyse. Les outils d'analyse fonctionnelle à utiliser seront introduits au fur et à mesure du cours.

Bibliographie

[1] J. L. Bona, M. Chen, and J.-C. Saut, Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media I: Derivation and the linear

theory, J. Nonlinear Sci., 12 (2002), pp. 283⊏318.
[2] A. de Bouard, J.M. Ghidaglia, J. C. Saut Histoires d'eau, histoires d'ondes, Images des mathématiques, 95, (1995), 23-30.
[3] F. Linares, G. Ponce, Introduction to nonlinear dispersive equations, Universitext book series, Springer, 2009.

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.

- S4 : Cours approfondi en probabilités et statistiques 1 : Introduction aux processus déterminantaux - 32h de CM et 8h de TD

Programme
Il sera question dans ce cours de processus ponctuels déterminantaux, souvent appelés DPP. Il s'agit de configurations aléatoires de points dont la loi peut être décrite à l'aide d'une fonction de deux variables (qui est le noyau d'un opérateur), ce qui permet d'en faire une étude fine.

Initialement considérés pour modéliser des fermions en mécanique quantique, les processus ponctuels déterminantaux ont été fortement popularisés ces vingt dernières années en raison de leur apparition assez surprenante dans divers champs des mathématiques et de la physique. Pour citer quelques exemples [2, 3], nous évoquerons - de manière plus ou moins aapprofondie selon les cas - les modèles aléatoires suivants : valeurs propres de matrices aléatoires, diffusions conditionnées à ne pas s’intersecter, zéros de fonctions analytiques aléatoires, gaz de Coulomb, pavages aléatoires, plus grande sous-suite croissante d’une permutation aléatoire et problème d’Ulam, représentations irréductibles du groupe symétrique sous la mesure de Plancherel, arbres couvrants uniformes d’un graphe.

Plus impressionnant encore, certains processus ponctuels déterminantaux (noyau sinus, noyau de Airy/loi de Tracy-Widom, pour citer les plus connus), apparaissent systématiquement comme objets limites dans l’étude locale de nombreux systèmes de particules aléatoires : ce sont les fameux phénomènes d’universalité en matrices aléatoires, qui en fait dépassent largement le cadre des seuls modèles matriciels [1].

Autre caractéristique très intéressante, les DPP ont la particularité de présenter de la répulsion entre les points: contrairement à des points i.i.d. qui peuvent s'accumuler au même endroit de l'espace, les nuages de points obtenus par DPP remplissent l'espace qui leur est alloué en s'écartant les uns des autres. Ces phénomènes de répulsion peuvent être exploités dans les applications, notamment en machine learning, dans les moteurs de recherche pour générer des réponses variées (et c'est grâce à eux que lorsque vous cherchez jaguar dans Google image, vous avez des félins ET des voitures), ou encore en analyse numérique pour accélérer des méthodes d'intégration numérique.

Le but de ce cours est de présenter une introduction assez complète des DPP en abordant à la fois des généralités théoriques, l’étude d’exemples concrets en lien avec des domaines assez divers des mathématiques et des exemples d'applications qui exploitent les propriétés fascinantes de ces configurations aléatoires.

Bibliographie

[1] P. Deift, Universality for mathematical and physical systems, International Congress of Mathematicians. Vol. I, 125–152, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[2] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres and B. Virág, Determinantal processes and independence, Probab. Surv. 3 (2006), 206–229.

[3] K. Johansson, Random matrices and determinantal processes, Mathematical statistical physics, 1–55, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.

S4 : Applications modernes de la théorie des probabilités à intelligence artificielle : méthodes génératives en apprentissage profond - 32h de CM et 8h de TD

Programme
L'année 2022 a été témoin de progrès très importants en IA, avec l'émergence de modèles génératifs de très haute qualité. Ces modèles se basent sur des notions avancées de théorie des probabilités. L'objectif premier de ce cours est d'introduire les notions de théorie des probabilités et de physique sous-jacentes à ces développement de pointe en IA, en particulier en apprentissage profond. Le deuxième est de faire comprendre concrètement ces notions à l'aide de leur implémentation machine et de visualisation d'exemples. Un troisième est d'illustrer leur applicabilité. En particulier, les principales librairies d'apprentissage automatique seront utilisées (sciait-learn, pytorch, tensorflow). Outre les connaissances en théories des probabilités qu'il permettra d'acquérir, ce cours offrira un bagage technique susceptible d'intéresser des entreprises et donc élargit le panel d'opportunités professionnelles à l'issue du master .

Plus précisément, les thèmes abordés seront :

Estimation Bayésienne,
Estimateur de maximum de vraisemblance
Algorithme EM (Estimation-Maximisation), Métropolis-Hasting, sampling de Gibbs
Entropie Croisée, distance de Kullback-Leibler
Calcul variationnel, Inférence variationelle
Transport optimal (distance de Wasserstein)

Applications :
Auto-encodeurs variationnels (VAE)
Modèles de diffusion (Dall-E, stable diffusion, etc…)
Réseaux adversaires génératifs de Wasserstein (GANs)

Quelques références pour avoir une idée des notions (sera complétée d'ici le début du cours)
https://towardsdatascience.com/variational-inference-c896668707aa
https://people.eecs.berkeley.edu/~jordan/papers/variational-intro.pdf
https://arxiv.org/pdf/2006.11239.pdf
https://arxiv.org/pdf/1601.00670.pdf
https://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_free_energy
http://www2.stat.duke.edu/~rcs46/modern_bayes17/lecturesModernBayes17/lecture-7/07-gibbs.pdf
https://openai.com/dall-e-2/
https://en.wikipedia.org/wiki/Stable_Diffusion
https://github.com/CompVis/stable-diffusion
https://en.wikipedia.org/wiki/Wasserstein_GAN
https://proceedings.mlr.press/v70/arjovsky17a.html

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.