Semestre 5

BCC Fondements des mathématiques

M51 – Groupes, anneaux, corps 1 [6 ECTS]

Horaire : 12 cours de 1h30 et 24 TD de 1h30

1. Ensembles : Axiomatiques de N, relations d'équivalence, ensemble quotient, construction de Z.
2. Groupes : groupes, sous-groupes, morphismes, noyau, image, groupe cyclique, ordre d'un élément, théorème de Lagrange, sous-groupe distingué, groupe quotient, groupe symétrique, groupe alterné, groupe opérant sur un ensemble, orbites, stabilisateurs, automorphismes intérieurs, classes de conjugaison, formule des classes, groupes diédraux et polygones réguliers.
3. Anneaux : Congruences, théorème chinois, groupe des éléments inversibles de Z/nZ, exemples de méthode de codage et de cryptage, morphismes d'anneaux, anneaux intègres, idéal, idéal premier, idéal principal, anneaux quotients, anneaux principaux, exemple des entiers de Gauss.
4. Corps : corps, sous-corps, corps premier, caractéristique d'un corps, corps des fractions d'un anneau intègre, construction de Q.
5. Polynômes : Polynômes sur un corps K, polynômes irréductibles, idéaux de K[X], algorithme d'Euclide, relations entre coefficients et racines ; corps des fractions rationnelles sur K.
6. Nombres : construction de R (à partir des suites de Cauchy) et de C (à partir de R[X]), éléments algébriques, transcendants, dénombrabilité du corps des nombres algébriques sur Q.

M52A -- Topologie et Calcul différentiel, parcours renforcé [6 ECTS]

Cette UE est composée de 54h de présentiel étudiant réparties en 33h de cours et 21h de TD. Elle est obligatoirement complétée par l'UEPE exclusive "Compléments de Topologie et Calcul différentiel, parcours renforcé", qui est constituée de 27h de TD.

1. Espaces métriques : exemples des espaces vectoriels normés, produit d'espace métriques, métrique induite sur un sous-ensemble ; boules, voisinages, ouverts, fermés, intérieur et adhérence d'une partie, parties denses, caractérisation séquentielles ; compacité (définition par l'axiome de Borel-Lebesgue, équivalence avec la caractérisation séquentielle), un produit d'espaces compacts est compact ; complétude, un produit fini d'espaces complets est complet.
2. Fonctions entre espaces métriques : limites en un point, caractérisation séquentielle ; continuité, continuité uniforme, exemple des applications lipschitziennes ; image réciproque d'un ouvert/fermé ; image continu d'un compact ; théorème de Heine ; théorème du point fixe contractant ; connexité, connexité par arcs, connexes de R, image continue des connexes.
3. Espaces vectoriels normés : normes, normes équivalentes ; espaces vectoriels normés de dimension finie : équivalence des normes et continuité des applications linéaires, les compacts sont les fermés bornés ; un exemple en dimension infinie : les fonctions continues sur un compact munies de la norme du sup ; complétude, application au théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.
4. Calcul différentiel entre espaces vectoriels normés de dimension finie : fonction différentiable, différentielle, dérivées partielles, différentielles des fonctions composées, lien avec les matrices jacobiennes, les fonctions de classe C^1 sont différentiables ; inégalité des accroissements finis, une fonction différentiable sur un ouvert connexe dont la différentielle est nulle est constante ; C^1 -difféomorphisme, théorème d'inversion locale, théorème d'inversion globale, théorème des fonctions implicites ; fonctions de classe C^k , lemme de Schwarz, théorème d'inversion locale

et des fonctions implicites pour les fonctions de classe C^k ; formules de Taylor.

M52B – Topologie et Calcul intégral, parcours classique [6 ECTS]

Horaire : 12 cours de 1h30 et 24 TD de 1h30

1. Espaces vectoriels normés : normes, normes équivalentes, exemples classiques ; ouverts, fermés, intérieur et adhérence d'une partie, parties denses, caractérisation séquentielle ; compacité (définition séquentielle).
2. Fonctions entre espaces vectoriels normés : limite, continuité, applications lipschitziennes ; image continue d'un compact ; théorème du point fixe contractant.
3. Espaces vectoriels normés de dimension finie : équivalence des normes et continuité des applications linéaires, les compacts sont les fermés bornés.
4. Intégrales doubles et formule de Green-Riemann : intégrale d'une fonction continue sur un pavé du plan ; sous-ensembles quarrables du plan et leurs aires, exemples des parties élémentaires $\{(x, y) \in R^2 ; a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ avec φ_1, φ_2 continues ; intégrales sur un sous-ensemble quarrable du plan, théorème de Fubini (admis), formule du changement de variable (admise) ; champs de vecteurs sur un ouvert de R^2, rotationnel, intégrale curviligne et formule de Green-Riemann (admise).

M53 -- Intégrales à paramètre et Séries de Fourier [6 ECTS]

Horaire : 12 cours de 1h30 et 24 TD de 1h30

1. Intégrales définies dépendant d'un paramètre : continuité, dérivabilité ; cas où les bornes d'intégration dépendent du paramètre.
2. Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre : continuité, dérivabilité ; mise en parallèle avec des résultats connus pour des séries de fonctions.
3. (En fonction du temps disponible) Critères de Cauchy pour la convergence uniforme des intégrales ; la convergence normale implique la convergence uniforme.
4. Polynômes et séries trigonométriques, calcul pratique des coefficients de Fourier, forme complexe de la série de Fourier.
5. Formes hermitiennes et identité de Parseval ; convergence en moyenne quadratique pour les fonctions continues par morceaux.
6. Lemme de Riemann-Lebesgue, théorème de convergence simple de Dirichlet pour les fonctions C^1 par morceaux, théorème de convergence uniforme pour les fonctions continues C^1 par morceaux.

M54 -- Analyse numérique matricielle [6 ECTS]

Horaire : 12 cours de 1h30 et 24 TD de 1h30 (dont 6 TP, pris en compte dans l'évaluation)

1. Introduction et rappels : motivation pour la résolution de systèmes linéaires ; matrices particulières ; normes vectorielles Hölderiennes ($p = 1, 2, \infty$), normes matricielles associées, rayon spectral, norme de Frobenius ; conditionnement d'une matrice ; série de Neumann, sensibilité de la solution d'un système linéaire par rapport aux perturbations des données.
2. Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires : méthodes d'élimination de Gauss, pivotage, factorisation LU, PA=LU, complexité ; cas particulier des matrices symétriques définies positives, factorisation de Cholesky ; problème des moindres carrés : équation normale et utilité d'une factorisation QR ; factorisation QR : approches de Householder et de Givens.
3. Calcul numérique des valeurs propres : motivation et applications ; théorème de Bauer-Fike ; méthode de la puissance, convergence ; itération invese ; décomposition en valeurs singulières (SVD) (motivations et applications), existence d'une SVD, calcul numérique, théorème de Eckart-Young (meilleure approximation d'une matrice de moindre rang).

BCC Ouverture et approfondissement

Ce bloc de connaissances et de compétences est d’une UE Projet de l’étudiant et d’une UE Anglais

Anglais [3 ECTS]

Anglais
Volume horaire : 18h

Projet de l’étudiant

Compléments de Topologie et calcul différentiel, parcours renforcé [3 ECTS, UEPE obligatoire et résrevée au parcours renforcé]

Epreuve orale [3 ECTS, UEPE]

L’UE consiste à préparer une épreuve orale d’une durée de 30 minutes. L’étudiant peut être interrogé indifféremment sur le programme de licence, suivant une liste de thèmes proposés au début du semestre, et qu’il a préalablement travaillés. L’étudiant est encadré par un enseignant-chercheur, au sein d’un groupe de 6 ou 7 étudiants.

Préparation aux épreuves écrites et orales scientifiques des concours d’entrée des grandes écoles [3 ECTS, UEPE]

Volume horaire : 10 séances de 2h.

L’UE dispense une préparation aux épreuves scientifiques des concours d’entrée en école d’ingénieur en s’appuyant sur une matière commune à la plupart de ces concours : les mathématiques. Il y a plusieurs manières d’intégrer une école d’ingénieur après des études à l’université. Soit intégrer sur concours ou dossier à bac+2 (second concours de l’ENS Lyon, concours voie universitaire de CentraleSupelec, ENSIMAG, etc), soit intégrer sur concours ou dossier ces mêmes écoles à bac+3. L’UE dispense une préparation aux épreuves scientifiques des concours d’entrée aux grandes écoles (orale ou écrit), suivant le concours visé, en s’appuyant sur les mathématiques.
Le cours dispense une culture mathématique complémentaire permettant à l’étudiant d’aborder dans les meilleures conditions les épreuves écrites et orales des concours. L’étudiant compose dans les conditions du concours des écrits blancs et/ou des oraux blancs, en fonction du concours envisagé.

Stage d’été en entreprise[3 ECTS, UEPE]

Objectifs :
- S'impliquer dans une entreprise pendant 6 à 12 semaines. Avoir une première expérience professionnelle.
- Affiner son projet professionnel, confirmer/infirmer son choix de s'orienter vers tel ou tel secteur professionnel.
- Découvrir en situation concrète les réalités de l'entrepreneuriat.

Compétences visées :
- Savoir rédiger un CV et une lettre de motivation, répondre à des annonces et faire une candidature spontanée, avoir une première expérience des entretiens de recrutement en présentiel ou en vidéo.
- Approfondir ses connaissances du monde professionnel, les confronter à la réalité.
- Savoir mettre en oeuvre dans des situations concrètes les savoirs et compétences apprises en licence.
- Savoir s'impliquer dans le fonctionnement d'une entreprise, posséder les savoir-être utiles en milieu professionnel.
- Etre capable de discerner différentes problématiques du fonctionnement d'une entreprise, de les comprendre et d'en présenter une de façon approfondie.
- Savoir présenter oralement un secteur professionnel, une entreprise, des activités et une problématique.
- Savoir rédiger sur ces sujets un rapport en français et en anglais.

Autre UEPE [3 ECTS, UEPE]

Voir la liste d’UEPE proposées sur ChoisisTonCours

Semestre 6

BCC Fondements des mathématiques

Ce BCC est constitué de trois UE : la première est à choisir entre M61A ou M61B. La deuxième, M62, est obligatoire. La troisième, à 12 ECTS, est constituée de 2 EC (enseignement constitutif) à choisir parmi M63 à M68.

M61A-- Intégration-Probabilités, parcours renforcé [6 ECTS]

Cette UE est composée de 54h de présentiel étudiant réparties en 33h de cours et 21h de TD.
Elle est obligatoirement complétée par l'UEPE exclusive “Compléments d'Intégration-Probabilités, parcours renforcé”, qui est constituée de 27h de TD.
Objectifs : connaître les bases de la théorie de l'intégrale de Lebesgue (tribu, mesure, intégrale) et les théorèmes principaux de la théorie de l'intégration (convergence monotone, convergence dominée, lemme de Fatou, Fubini), savoir appliquer ces théorèmes dans des situations concrètes, en particulier dans le contexte probabiliste. Savoir modéliser une expérience aléatoire en faisant appel à des variables aléatoires réelles ou des vecteurs aléatoires, savoir déterminer leur loi. Une première approche des notions de convergence presque sûre et en loi sera proposée, pour déboucher sur des énoncés précis de la loi forte des grands nombre et du théorème central limite.
1. Tribus et mesures : algèbre, tribu, tribu engendrée, exemple de la tribu borélienne de R ; notion de tribu produit ; espace mesurable, vocabulaire probabiliste ; définition d'une mesure, d'une probabilité ; théorème de la classe monotone, théorème de prolongement ; exemple de la mesure de Lebesgue (on pourra aborder sa construction) dans R et R n , aspects géométriques ; exemples de mesures discrètes ; fonctions mesurables (= variables aléatoires).
2. Loi d'une variable aléatoire réelle : notion de mesure image, rappel sur les lois discrètes, lois à densité, fonction de répartition, “catalogue” de lois classiques, exemples simples de lois ni discrètes ni à densité.
3. Intégrale de Lebesgue, intégration par rapport à une mesure σ-finie et espérance : intégration des fonctions étagées, des fonctions positives, fonctions intégrables, propriétés de l'intégrale ; théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée, lemme de Fatou ; espérance d'une variable aléatoire réelle, théorème de transfert, moments, variance ; inégalité de Markov, de Bienaymé-Chebychev.
4. Intégrales multiples et vecteurs aléatoires : théorème de Fubini-Tonelli, intervertion série intégrale, formule de changement de variable, exemples de calculs d'aire, de volume.
5. Indépendance et théorèmes limites : indépendance de variables et vecteurs aléatoires ; convergence presque sûre et LGN forte, convergence en loi, approximation binomiale-gaussienne, théorème central limite, marge d'erreur d'un sondage.
Les 48h de TD pourront comporter 6h de TP avec Python.

M61B –Probabilités-Intégration, parcours classique[6 ECTS]

Objectifs : savoir modéliser une expérience aléatoire en faisant appel à des variables aléatoires réelles, savoir déterminer leur loi, calculer leur espérance pour répondre à des questions concrètes sur le modèle initial. Afin de pouvoir définir rigoureusement les notions probabilistes rencontrées, des éléments minimaux de théorie de la mesure et d'intégration au sens de Lebesgue seront introduits. Une première approche des notions de convergence presque sûre et en loi sera proposée, pour déboucher sur des énoncés précis de la loi forte des grands nombre et du théorème central limite.
1. Rudiments de la théorie de la mesure : tribu, tribu borélienne, fonctions mesurables (= variables aléatoires), mesure, mesure de Lebesgue.
2. Loi d'une variable aléatoire réelle : rappel sur les lois discrètes, loi à densité C 1 par morceaux, fonction de répartition, “catalogue” de lois classiques, exemples simples de lois ni discrètes ni à densité.
3. Intégrale par rapport à une mesure σ-finie et espérance : intégration des fonctions étagées, des fonctions positives, fonctions intégrables, propriétés de l'intégrale ; théorème de convergence dominée (admis) ; espérance d'une variable aléatoire réelle, théorème de transfert, moments,

variance ; inégalité de Markov, de Bienaymé-Chebychev.
4. Variables aléatoires indépendantes : loi forte des grands nombres ; théorème de la limite centrale, application à la marge d'erreur d'un sondage.
Les 36h de TD comportent 6h de TP avec Python.

M62 –Equations différentielles [6 ECTS]

1. Introduction aux équations différentielles : forme générale d'une équation différentielle, cas scalaire et vectoriel ; notion d'ordre ; condition initiale, problème de Cauchy ; définition d'une solution, solution maximale, solution globale ; énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz ; quelques techniques de résolution explicite (pour les équations linéaires scalaires, d'ordre 1, ou d'ordre 2 à coefficients constants, équations à variables séparées) ; illustration sur des modèles : datation du carbone 14, équation du pendule, dynamique des populations.
2. Théorie de Cauchy : preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz pour y'= F (t, y) dans R^n ; applications à l'étude qualitative (non-intersection des graphes de solutions, théorème d'explosion en temps fini) ; exemples d'études qualitatives (points d'équilibre, portrait de phase), exemples du mouvement du pendule, système de Lotka-Volterra.
3. Equations différentielles linéaires : Solutions des équations linéaires scalaires ; lemme de Grönwall ; théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire ; structure de l'ensemble des solutions, Wronskien, méthode de variation des constantes ; équations différentielles linéaires d'ordre n ; équations à coefficients constants ; portraits de phase de Y'= AY dans R^2 , où A est une matrice à coefficients constants.
Les 36 heures de TD comportent 10h de TP avec Python.

M63–Fonctions d'une variable complexe [6 ECTS, option]

1. Analycité et holomorphie : rappels sur les séries entières : étude dans le cadre complexe, séries entières des fonctions usuelles ; notions de C-dérivabilité dans un ouvert ; la somme d'une série entière est C-dérivable sur l'intérieur de son disque de convergence ; une fonctionest C-dérivable si et seulement si elle est différentiable et sa différentielle est C-linéaire ; opérateurs ∂, ∂ ¯et règles de calculs ; définition de l'holomorphie.
2. Propriétés des fonctions holomorphes : retombées classiques du théorème fondamental : rayon de convergence du développement en un point, équivalence entre holomorphe et analytique, représentation intégrale des dérivées, inégalités de Cauchy, théorème de Liouville ; principe des zéros isolés ; théorème d'inversion locale holomorphe ; étude locale d'une fonction holomorphe au voisinage d'un zéro ; principe du maximum ; lemme de Schwarz ; application à la description des automorphismes du disque unité.
3. Primitives : primitives holomorphes, lemme de Morera ; existence de primitives locales et sur un ouvert étoilé, logarithmes ; notion d'indice d'un point par rapport à un chemin.
4. Singularités et résidus : singularités isolées, développement en série de Laurent, classification des singularités ; théorème de Weierstrass sur les singularités isolées effaçables, théorème de Casorati-Weierstrass sur les singularités essentielles ; théorème des résidus ; calculs d'intégrales par les résidus ; décomptes des zéros et pôles, théorème de d'Alembert, théorème de Rouché.

M64 –Groupes, Anneaux, Corps 2 [6 ECTS, option]

1. Groupes : théorèmes de Sylow ; produits semi-directs ; groupes d'isométries des polyèdres réguliers en dimension 3 ; groupes abéliens finis (énoncé sans preuve du théorème de structure).
2. Anneaux : anneaux factoriels, exemples et contre-exemples ; A factoriel entraine A[X] factoriel ; critères d'irréductibilité ; applications arithmétiques.
3. Adjonction de racines : corps de rupture (existence, unicité à isomorphisme près), corps de décomposition.
4. Corps finis : polynômes sur les corps finis, théorème d'existence et d'unicité des corps finis.
5. Polynômes à plusieurs indéterminées : polynômes homogènes, symétriques.

M65 –Option d’Analyse numérique [6 ECTS, option]

1. Interpolation polynomiale : le problème : approcher un graphe, interpoler des points ; polynômes d’interpolation de Lagrange, existence et unicité ; bases polynomiales (canoniques, Lagrange, Newton) et méthode de Horner ; Calcul du polynôme d’interpolation , différences divisées ; erreur d’interpolation.
2. Intégration numérique : formules de quadrature élémentaires et composites, lien avec les sommes de Riemann ; formules de Newton-Cotes ; ordre et degré de précision ; estimation d’erreur à l’aide de la formule de Cauchy, applications ; accélération de convergence (méthode de Romberg) ; méthodes de quadrature de Gauss.
3. Résolution numérique d’EDO : modélisation de quelques phénomènes physiques (pendule, masses-ressorts, modèles de population, proie-prédateur) ; méthodes d’approximation numérique à un pas : schémas numériques explicites, schémas implicites, méthodes de Runge-Kutta ; lemme de Gronwall ; notions d’ordre de consistance, stabilité, convergence ; convergence des méthodes à un pas ; A-stabilité ; méthodes multi-pas (Adams-Bashforth, Adam-Moulton, méthodes rétrogrades BDF2).

Les 36 heures de TD comportent 10h de TP avec Python.

M66 –Statistique mathématique [6 ECTS, option]

Objectifs :
— avoir un premier aperçu de deux problèmatiques fondamentales en statistique : l’estimation et la prise de décision ;
— pour l’estimation, apprendre à construire rigoureusement un intervalle de confiance ;
— pour la prise de décision, découvrir le vocabulaire des tests d’hypothèses, savoir construire et interpréter quelques tests simples.
1. Simulation de variables aléatoires : simulation de variables aléatoires discrètes, inverse de la fonction de répartition, méthode du rejet, etc.
2. Estimation ; introduction du vocabulaire de l’estimation à partir du modèle de Bernoulli ; intervalles de confiance non asymptotiques.
3. Introduction à la notion de tests statistiques : vocabulaire des tests d’hypothèses (hypothèses, risque, région de rejet, puissance) ; test sur une probabilité inconnue dans le cadre du modèle de Bernoulli (test binomial) ; exemples de tests de comparaison d’échantillons appariés (test du signe) et non appariés (test des longueurs, test de la somme des rangs).
4. Application de la loi des grands nombres et du théorème de la limite centrale (TCL) aux intervalles de confiance et aux tests : rappel de la loi des grands nombres ; rappel du théorème de Moivre et énoncé du TCL ; intervalles de confiance asymptotiques ; propriétés des estimateurs, consistance et normalité asymptotique.
Les 36h de TD comportent une dizaine d’heures de TD avec Python.

M67 –Mécanique du système solaire et spatiale [6 ECTS, option]

1. Le problème des deux corps.
2. La formulation du problème des N corps.
3. Sphère d’influence.
4. Bases de l’intégration numérique.
5. Trajectoires des sondes spatiales.
6. Calcul d’éphémérides à partir d’éléments d’orbite.
7. Le problème des trois corps : points de Lagrange, stabilité, mouvement près des points d’équilibre.
8. Positions d’équilibre et stabilité de $N > 2$ satellites co-orbitaux.

Des TDs sur machine de simulation numérique, et des séances d’observation du ciel à la lunette de l’Observatoire de Lille, compléteront l’enseignement.

M68 –Histoire des mathématiques [6 ECTS, option]

1. Les grecs et le concept de limite :
— Aristote et l’infini ;
— l’école pythagoricienne et le concept de “grandeur incommensurable” ;
— la méthode d’exhaustion : Euclide et Archimède.
2. Les XVIIe et XVIIIe siècles :
— les précurseurs du calcul infinitésimal : la méthodes des indivisibles pour le calcul d’aire, la méthode de l’adégalisation de Fermat, Galilée, Descartes et les fondements de l’analyse ;
— Leibniz, Newton et l’émergence du calcul ;
— problèmes de rigueur dans le calcul infinitésimal chez Euler et Lagrange.
3. Le XIXe siècle :
— l’arithmétisation de l’analyse : Cauchy, Riemann, Weierstrass ; des nouvelles définitions de “fonction”, “limite”, “dérivée” et “intégrale” ;
— Cantor : ensembles “dénombrables” et “continus” ;
— la construction axiomatique des nombres réels : les “coupures” de Dedekind et les “suites fondamentales” de Cantor.

Références :

A. Dahan-Dalmedico, J. Peiffer, Une histoire des mathématiques, Ed. du Seuil, Paris, 1986.
P. Dugac, Histoire de l’analyse moderne, Paris, 2003.
M. Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, New York, Oxford Univ. Press, 1972.
Szabo, Les débuts des mathématiques grecques, Paris, Vrin, 1977.

BCC Ouverture et approfondissement

Anglais [3 ECTS]

Volume horaire : 18h

Projet de l'étudiant

Compléments d'Intégration-Probabilités, parcours renforcé [3 ECTS, UEPE obligatoire pour les étudiants ayant choisi M61A]

Epreuve orale [3 ECTS, UEPE]

L'UE consiste à préparer une épreuve orale d'une durée de 30 minutes. L'étudiant peut être interrogé indifféremment sur le programme de licence, suivant une liste de thèmes proposés au début du semestre, et qu'il a préalablement travaillés. L'étudiant est encadré par un enseignant-chercheur, au sein d'un groupe de 6 ou 7 étudiants

Soutien en Maths aux futurs professeurs des écoles [3 ECTS, UEPE]

Objectifs :
Fournir une expérience aux étudiants intéressés à découvrir l'enseignement en Maths en primaire. Il s'agit d'aider des étudiants de licence littéraire à comprendre leurs cours de Maths. Cet enseignement s'effectue dans le cadre de l'option transversale « Professorat des écoles » du campus Pont de Bois.
Compétences visées :
Apprendre à transmettre des connaissances, à identifier des problèmes de compréhension, et à aider des étudiants à progresser en mathématiques.
Résumé du cours :
Les étudiants se rendent pendant une année universitaire, une fois par semaine, pour 20 séances, au Pont de Bois. Les séances de tutorat durent 1h30. Chaque étudiant de Maths est responsable d'un petit groupe d'étudiants de Pont de Bois (4 ou 5 environ , toujours les mêmes). Il est encadré par un enseignant de Maths intervenant dans l'option transversale « Professorat des écoles » . L'ensemble est coordonné par la responsable des enseignements de Maths de l'option, actuellement Mme Amélie Zill. Les étudiants rédigent un mémoire et le présente lors d'une soutenance orale organisée par la responsable de l'enseignement.

Autre [3 ECTS, UEPE]

Voir sur ChoisisTonCours