Master Mathématiques
première année

ANNEE 2020 – 2021

VERSION INTERMEDIAIRE

Site web : https://sciences-technologies.univ-lille.fr/

Responsable Master 1 Mathématiques
Léa Blanc-Centi
Département de Mathématiques, bât. M2, Bureau 302
Faculté des Sciences, Université de Lille
Email : lea.blanc-centi@univ-lille.fr

Secrétariat Pédagogique
Françoise Leroy
Département de Mathématiques, bât. M2, Bureau 10
Faculté des Sciences, Université de Lille
Email : math-masters1@univ-lille1.fr
Tél. : 03 20 43 45 74 – Fax. : 03 20 33 63 38

OBJECTIFS DE LA MENTION

Objectifs scientifiques et/ou professionnels

Le Master Mathématiques est une formation académique classique qui jouit d'une longue expérience.

Les différents objectifs de la formation peuvent se décliner comme suit

- Fournir un bagage solide et de haut niveau en mathématiques.
- Initier à la recherche.
- Permettre, dans certains cas, une insertion professionnelle immédiate.
- Apporter des compléments pour les étudiants souhaitant préparer le concours de l'Agrégation.

Le Master Mathématique prépare aux fonctions d'enseignant (concours de l'Agrégation Externe) et de chercheur. Par sa poursuite en doctorat, le Master permet d'envisager une carrière comme enseignant-chercheur en Mathématiques dans l'enseignement supérieur, ou de chercheur dans un laboratoire de recherche public ou privé et, plus généralement, dans des sociétés de services ayant besoin de mathématiciens.

Filières

Le recrutement en M1 s'effectue auprès des étudiants sortant des licences de mathématiques des universités régionales, nationales et auprès d'étudiants étrangers via par exemple des programmes Erasmus et inter-universitaires. Les étudiants de Centrale Lille ainsi que de Polytech Lille sont également susceptibles d'être accueillis pour tout ou partie de la mention.

Publics concernés

Les étudiants titulaires d'une licence de Mathématiques obtenue en France peuvent présenter un dossier de candidature pour le M1 Mathématiques. L'admission est subordonnée à l'examen de ce dossier, et conditionnée aux capacités d'accueil du M1 Mathématiques.

Compte tenu de la diversité en termes de contenu des licences au niveau national, un aménagement du cursus peut éventuellement être proposé.

Les étudiants n'ayant pas le titre requis et les titulaires d'un diplôme étranger doivent passer par une procédure de validation des acquis.

Le redoublement est soumis à décision du jury. Les « enjambements » entre M1 et M2 ne sont pas autorisés. Les ingénieurs diplômés de certaines Grandes Écoles ou les titulaires de l'Agrégation Externe peuvent aussi présenter un dossier. Les diplômes étrangers sont soumis à validation par la Commission compétente de l'Université concernée.

L'année M2 du Master Mathématiques est ouverte de plein droit à tout étudiant ayant validé l'année M1 du Master Mathématiques.

ORGANISATION DU CURSUS

Les enseignements sont organisés en Blocs de Connaissances et de Compétences (BCC) et découpés en Unités d'Enseignement (UE).

Semestre 1

• **BCC 1 « Maîtriser les concepts des mathématiques (niveau général) »**
L'étudiant choisit 3 UE parmi 4. Chaque UE comprend 33h de cours et 48h de travaux dirigés réparties sur 12 semaines et compte pour 9 ECTS. Les intitulés des UE du semestre 1 sont les suivants :

1. Analyse
2. Géométrie différentielle
3. Groupes et géométrie
4. Probabilités

• **BCC 2 « Préparer son insertion professionnelle – Connaître les métiers des mathématiques »**
L'étudiant suit également une UE Projet de l'Etudiant (UE PE), qui compte pour 3 ECTS. Cette UE est choisie parmi deux propositions, selon le projet professionnel :

1. 3A = *préparation au concours ENS cycle master*
2. Workshop = *séminaire d'étudiants*

Semestre 2

• **BCC 1 « Maîtriser les concepts des mathématiques (niveau approfondi) »**
L'étudiant choisit 3 UE parmi 5. Chaque UE comprend 24h de cours et 24h de travaux dirigés réparties sur 12 semaines et compte pour 6 ECTS. Les intitulés des UE du semestre 2 sont les suivants :

1. Analyse complexe
2. Analyse numérique pour les EDP
3. Probabilités et statistiques
4. Théorie de Galois
5. Topologie algébrique

• **BCC 3 « S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel (niveau 1) »**

Ce BCC comprend 4 UE obligatoires comptant chacune pour 3 ECTS :

- un travail encadré de recherche (TER) avec mémoire
- une UE d'anglais mathématique (24h de TD)
- une UE « Outils pour les professionnels des mathématiques » (12h de cours, 12h de TD)
- une UE d'ouverture (12h de cours, 12h de TD)

L'UE d'ouverture est à choisir parmi

1. Eléments d'histoire et d'épistémologie des mathématiques
2. Informatique

Organisation générale

SEMESTRE 1			
BCC	**UE**	**Matières**	**ECTS**
BCC 1a	Choix de 3 UE parmi 4	• Analyse • Géométrie différentielle • Groupes et géométrie • Probabilités	9 ECTS 9 ECTS 9 ECTS 9 ECTS
BCC 2	Choix d'une UE PE parmi 2	• 3A • Workshop	3 ECTS 3 ECTS
SEMESTRE 2			
BCC	**UE**	**Matières**	**ECTS**
BCC 1b	Choix de 3 UE parmi 5	• Analyse complexe • Analyse numérique pour les EDP • Probabilités et statistiques • Théorie de Galois • Topologie algébrique	6 ECTS 6 ECTS 6 ECTS 6 ECTS 6 ECTS
BCC 3	UE obligatoires	• TER • Anglais mathématique • OPM	3 ECTS 3 ECTS 3 ECTS
	Choix d'une UE parmi 2	• Eléments d'histoire et d'épistémologie des mathématiques • Informatique	3 ECTS 3 ECTS

Le M1 est commun aux deux parcours du Master. L'orientation s'effectue en choisissant les UE parmi l'offre ci-dessus, selon le parcours de Master 2 envisagé.

- Le **parcours « Agrégation »** confère un socle de connaissances généralistes de haut niveau en mathématiques. Il intègre à la fois des aspects de mathématiques pures et de mathématiques appliquées, ainsi qu'une préparation spécifique à l'exposé public et à l'enseignement, à travers les « leçons d'agrégation ». Ce parcours débouche sur les carrières des lauréats du concours de l'Agrégation Externe de Mathématiques : professeurs agrégés de l'enseignement secondaires, PRAG, professeurs en CPGE ou BTS. Au-delà de cette visée professionnelle bien identifiée, les connaissances fondamentales acquises dans l'optique du concours sont également très appréciables pour les étudiants souhaitant s'orienter ultérieurement vers la recherche.

- Le **parcours « Recherche »** permet l'acquisition de connaissances approfondies dans des thématiques de recherche contemporaines en mathématiques. Les choix des cours proposés permettent de bénéficier d'un premier contact avec des problématiques de recherche en mathématiques, allant des mathématiques pures comme l'algèbre, l'analyse ou la géométrie jusqu'aux mathématiques appliquées comme l'analyse numérique, les équations aux dérivés partielles, les probabilités ou les statistiques. Cette formation représente donc une option privilégiée pour poursuivre en doctorat en mathématiques fondamentales ou appliquées.

DESCRIPTIF DES UE DU SEMESTRE 1.

S1 : **Analyse**

Exemples d'espaces de fonctions

Espace des fonctions continues sur un compact: norme de la convergence uniforme, théorème d'approximation de Weierstrass; théorème de Stone-Weierstrass (admis); théorème d'Ascoli. Rappels sur l'espace des applications linéaires continues, traduction en termes d'hyperplans. Espaces L^p: rappels sur l'intégrale de Lebesgue dans R^d, construction des espaces L^p, inégalités de Hölder et de Minkowski, densité des fonctions continues à support compact.

Les théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle

Rappels sur la complétude, exemples d'espaces complets, théorème de Riesz-Fischer et conséquence sur la convergence pp d'une sous-suite. Lemme de Baire, théorème de Banach-Steinhaus, théorème de l'application ouverte, théorème d'isomorphisme de Banach; applications. Notions élémentaires sur la convexité et théorème de Hahn-Banach.

Espaces de Hilbert

Rappels du programme de L sur les espaces préhilbertiens (produit scalaire, familles orthonormales...). Espaces de Hilbert, projection sur un convexe fermé, somme directe orthogonale, bases hilbertiennes dans le cas séparable, exemple des séries de Fourier de fonctions de L^2. Dualité, théorème de représentation de Riesz.

Transformation de Fourier

Produit de convolution $f * g$ avec f L^1 et g L^p ($p \geq 1$). Continuité des translations dans L^p, approximations de l'unité, régularisation. Transformation de Fourier sur L^1: définition, propriétés élémentaires, transformée d'un produit de convolution. Lemme de Riemann-Lebesgue. Formule d'inversion. Transformation de Fourier-Plancherel sur L^2.

Distributions tempérées

Espace de Schwartz S et distributions tempérées. Opérations: multiplication par une fonction lisse, dérivation. Exemples classiques (Heaviside, Dirac, ln, vp(1/x)...). Transformation de Fourier sur S et sur S'. *L'application à l'étude de l'équation de la chaleur et de l'équation de Laplace doit être vue, au moins en TD.*

Cours :

TD :

S1 : **<u>Géométrie différentielle</u>**

Sous-variétés

Rappels de calcul différentiel (théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites, théorème du rang constant).

Sous-variétés de R^n : définitions équivalentes (graphe, paramétrage, redressement, fonction implicite). Espace tangent. Gradient. Exemples fondamentaux.

Extrema liés sur les sous-variétés, multiplicateurs de Lagrange.

Systèmes dynamiques

Champs de vecteurs dans R^n. Flot d'un champ de vecteurs. Théorème de redressement. Linéarisation aux points critiques.

Systèmes dynamiques. Stabilité et fonctions de Liapounov. Théorème de Poincaré-Bendixon.

Cours :

TD :

S1 : **<u>Groupes et géométrie</u>**

Compléments sur les groupes

Groupes abéliens de type fini (avec démonstration).

Sous-groupe dérivé, abélianisé, suite dérivée, notion de groupe résoluble. Un groupe fini est résoluble si et seulement si il admet une suite de sous-groupes $G=G_0>G_1> \dots >G_n=\{e\}$ avec G_i distingué dans G_{i-1} et G_i/G_{i-1} cyclique. Exemples et contre-exemples : groupes abéliens, sous-groupes des matrices triangulaires, les groupes simples résolubles sont d'ordre premier, p-groupes, groupes symétriques, groupes alternés...

Caractères (multiplicatifs), groupe dual. Cas des groupes abéliens : base de $L^2(G)$, transformée de Fourier, convolution.

Etude du groupe linéaire : générateurs, sous-groupe dérivé, simplicité de PSL(n,k) (si n≥3 ou # k≥4).

Représentations linéaires des groupes finis

Représentations linéaires d'un groupe fini (sur un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des complexes), sous-représentations, morphismes de représentations. Exemples (représentations de permutation, régulière...).

Représentations irréductibles, décomposition, lemme de Schur.

Caractères, orthogonalité, fonctions centrales. Décomposition de la représentation régulière en somme de représentations irréductibles. Table de caractères. Caractérisation des groupes abéliens finis.

Caractères de groupes de petit cardinal. Lien avec la géométrie (groupes des polyèdres).

Intégralité des caractères. Le degré d'une représentation irréductible divise l'ordre du groupe.

Formes quadratiques et groupes orthogonaux en dimension finie

Formes bilinéaires, vecteurs isotropes, sous-espaces isotropes, orthogonal, rang. Groupe orthogonal associé à une forme non dégénérée.

Classification des formes quadratiques : bases orthogonales. Classification sur C (et plus généralement sur un corps algébriquement clos), sur R, sur un corps fini.

Groupe orthogonal euclidien : générateurs, centre, commutateurs. Simplicité de SO(3;R). Quaternions et isomorphismes exceptionnels : quotients SU(2)->SO (3;R), SU(2) X SU(2)->SO (4;R) (et non-simplicité de PSO (4;R)).

Décomposition polaire dans GL(n, R). Le groupe orthogonal O(n, R) est un compact maximal. Décomposition polaire dans GL(n, C).

Cas général : plans hyperboliques, sous-espaces hyperboliques, lagrangiens, théorème de Witt. Générateurs et centre de O(q).

Cours :
TD :

S1 : **Probabilités**

Rappels de théorie de la mesure, intégration et Proba.

Convergence des variables aléatoires: Lemme de Borel-Cantelli, convergences ps, L^p, Proba et en loi, liens entre ces convergences, tension.

Convolution et fonctions caractéristique: somme de v.a., convolution de mesures, fonction caractéristique, théorème de Lévy.

Espérance conditionnelle: Théorème de Radon-Nikodym, espérance conditionnelle, interprétation L^2, propriétés, liens avec la loi conditionnelle (cas discret et à densité).

Vecteurs gaussiens: Définition et propriétés, théorème de Cochran et applications, modèle linéaire gaussien.

Martingales: Théorème d'arrêt, inégalité de Doob, Théorème de convergence des martingales bornées dans L^2, Théorème de convergence des sous martingales majorées.

Cours :
TD :

DESCRIPTIF DES UE DU SEMESTRE 2.

S2 : <u>**Analyse complexe**</u>

Fonctions holomorphes

Brefs rappels du programme de L sur les fonctions holomorphes. Automorphismes du disque. Principe de l'argument. Logarithme complexe.

Suites de fonctions holomorphes

Théorème de convergence de Weierstrass. Théorème de Hurwitz. Topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Théorème de Montel, description des parties compactes de *Hol(D)*.

Méthodes constructives

Fonctions holomorphes définies par une intégrale, séries et produits infinis de fonctions holomorphes, exemples (fonctions Gamma, zeta…). Théorème de Weierstrass sur la construction de fonctions holomorphes à zéros prescrits, écriture d'une fonction méromorphe comme quotient de fonctions holomorphes.

Représentation conforme

Biholomorphismes. Théorème de représentation conforme de Riemann.

Cours :
TD :

S2 : <u>**Analyse numérique pour les EDP**</u>

Étude théorique des EDP linéaires (18h CM, 18 TD)

Présentation des équations de Laplace et de la chaleur. Quelques aspects qualitatifs de leurs solutions (unicité, principe du maximum, résolution sur domaines particuliers).

Méthode de différences finies : schémas différences finies ; principe de la méthode des différences finies ; consistance, stabilité et convergence.

Résolution de grands systèmes linéaires provenant de la discrétisation d'une EDP (6h CM, 6h TD)

Cadre général des méthodes de projection.

Méthodes de la plus forte pente et gradient conjugué.

Méthode des sous-espaces de Krylov : Arnoldi, FOM, GMRES, Lanczos, BiCGStab.

Cours :
TD :

S2 : <u>Probabilité-Statistiques</u>

Chaîne de Markov à temps discret et espace dénombrable: calcul matriciel, propriété de Markov forte, caractérisation des états, mesures invariantes, Théorème ergodique, convergence en loi vers la loi stationnaire.

Estimation paramétrique : méthode des moments, maximum de vraisemblance.

Propriétés des estimateurs : exhaustivité, estimateur de variance minimale, borne de Cramer Rao, consistance, normalité.

Intervalle de confiance asymptotique ou non.

Fonction de répartition empirique : Théorème de Glivenko-Cantelli, loi de Kolmogorov-Smirnov.

Test paramétrique : test du rapport de vraisemblance, test du Chi2, Test de Kolmogorov-Smirnov.

Cours :
TD :

S2 : **Théorie de Galois**

Extension de corps, degré. élément algébrique, entier, transcendant. Somme et produit d'éléments algébriques, d'éléments entiers. Extensions algébriques, transcendantes. On fera les rappels nécessaires sur l'arithmétique de k[X].

Constructibilité à la règle et au compas (condition nécessaire, application aux problèmes de l'antiquité). Ce point pourra être vu en TD.

Rappels de L3 : corps de rupture, corps de décomposition, corps finis.

Clôture algébrique. C est algébriquement clos.

Racines de l'unité, polynômes cyclotomiques (irréductibilité), corps cyclotomiques.

Corps quadratiques. Anneaux d'entiers des corps quadratiques : décomposition des nombres premiers. Loi de réciprocité quadratique. Entiers de Gauss et théorème de deux carrés.

Théorème de l'élément primitif (en caractéristique nulle, et sur les corps finis).

Correspondance de Galois (en caractéristique nulle, et sur les corps finis). Exemples de calculs de groupes de Galois.

Applications : résolution des équations par radicaux, constructibilité à la règle et au compas (caractérisation des nombres constructibles, caractérisation des polygones constructibles).

Cours :
TD :

S2 : **Topologie algébrique**

Eléments de topologie générale (séparation, compacité, connexité, topologie quotient). Actions de groupes par homéomorphismes.

Homotopie. Groupe fondamental. Théorème de Van Kampen.

Homologie singulière. Suite exacte de Mayer-Vietoris. Homologie des sphères. Théorème de séparation de Jordan-Brouwer.

Cours :
TD :

Responsables du Master 2		
PARCOURS	**ENSEIGNANTS**	**CONTACTS**
Recherche (orientation Mathématiques Fondamentales)	Gautami Bhowmik	Bureau 013 (extension) Bât. M2 Gautami.bhowmik@univ-lille.fr
Recherche (orientation Mathématiques Appliquées)	André De Laire	Bureau 306 au Bât. M2 Andre.De-Laire@univ-lille.fr
Agrégation externe	Vincent Thilliez	Bureau 207 au Bât. M2 Vincent.thilliez@univ-lille.fr