MASTER 2 Sciences, Technologies, Santé

Mention Mathématiques

Parcours Recherche

En co-accréditation avec l'Université d'Artois et

avec l'Université Polytechnique Hauts-de-France,

Année universitaire 2020 – 2021

Laboratoire Paul Painlevé - Université de Lille	(CNRS UMR 8524)
Laboratoire de Mathématiques de Lens - Université d'Artois	(UR 2462)
Laboratoire de Mathématiques LAMAV - UPHF	(EA 4015)
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur - UPHF	

https://sciences-technologies.univ-lille.fr/les-departements-de-formation/mathematiques/

RESPONSABLES LILLE

Gautami BHOWMIK
gautami.bhowmik@univ-lille.fr
André DE LAIRE
andre.de-laire@univ-lille.fr
Université de Lille
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Mathématiques
59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

SECRETARIAT

Aurore SMETS
math-masters2@univ-lille.fr
Tel. 03.20.43.42.33

RESPONSABLE VALENCIENNES

Serge NICAISE
Université Polytechnique Hauts-de-France
LAMAV - ISTV2
Le Mont Houy
59313 VALENCIENNES Cedex 9

SECRETARIAT

Nabila DAIFI
nabila.daifi@uphf.fr
Tel. 03.27.51.19.01

RESPONSABLE LENS-ARTOIS

Martintxo SARALEGI-ARANGUREN
saralegi@euler.univ-artois.fr
Tel. 03.21.79.17.20
Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Rue J. Souvraz, SP 18
F-62307 LENS CEDEX

OBJECTIFS

Le **Master Mathématiques** offre une formation approfondie en mathématiques et fourni un bagage solide et de haut niveau en mathématiques. Le parcours **Recherche** permet l'acquisition de connaissances approfondies dans des thématiques de recherche contemporaines en mathématiques. Les choix des cours proposés permettent aux étudiants de bénéficier d'un premier contact avec des problématiques de recherche en mathématiques, allant des mathématiques pures jusqu'aux mathématiques appliquées.

La formation est centrée sur les cinq domaines des mathématiques pures et appliquées représentés dans les laboratoires :

- Analyse
- Analyse numérique et équations aux dérivées partielles
- Arithmétique et géométrie algébrique
- Géométrie et topologie
- Probabilités et statistiques

DEBOUCHES

Le parcours **Recherche** s'inscrit principalement dans le monde de la recherche et de l'enseignement. Il prépare aux fonctions d'enseignant et de chercheur. Par sa poursuite en doctorat, le Master permet d'envisager une carrière d'enseignant-chercheur en Mathématiques dans l'enseignement supérieur, ou de chercheur dans un laboratoire de recherche public (CNRS, INRIA, etc) ou privé et, plus généralement, dans des sociétés de services ayant besoin de mathématiciens.

Pour préparer une thèse de doctorat :

Un nombre limité de contrats doctoraux de 3 ans peuvent être établis. Leurs sources de financement sont : Allocations de recherche du Ministère, bourse du LABEX CEMPI, bourses CNRS, bourses de la Région, bourses CIFRE, bourses financées par des programmes institutionnels. Une rémunération complémentaire pour service d'enseignement peut également être envisagée.

Candidature : Les règles du concours d'attribution des allocations de thèse et le dossier à télécharger se trouvent sur le site de l'Ecole Doctorale SPI (http://edspi.univ-lille1.fr/). L'étudiant choisit un sujet de thèse (la liste se trouvant sur les sites web des laboratoires), se met en contact avec un directeur de thèse et lui adresse un dossier complet (cf calendrier en ligne).

BOURSES

Des bourses d'excellence de Master 2, financées par le LABEX CEMPI (http://math.univ-lille1.fr/~cempi/), peuvent être attribuées aux candidats les plus méritants. La procédure de candidature est expliquée sur le site de la formation : http://mathematiques.univ-lille1.fr/Formation/Masters-du-departement-de-Mathematiques/Masters-mathematiques/Master_2_Mathematiques_Recherche-Rentree/?info=adm .

Date limite de dépôt des demandes de bourse d'excellence : 15 février2021

ADMISSIONS

PHASE 1 : CANDIDATURE (PRÉ-REQUIS ET PUBLIC CONCERNÉ)

S'agissant des étudiants ayant validé le master 1 de la mention Mathématiques de l'Université de Lille, l'accès au master 2 Mathématiques parcours Recherche est de droit ; il vous appartiendra donc de procéder directement à votre inscription administrative (cf phase 2).

S'agissant des étudiants ayant validé un autre master 1 d'un parcours national de master dans une mention compatible (Mathématiques fondamentales ou appliquées) ou un diplôme à l'étranger (hors procédure Campusfrance), l'accès en master 2 Mathématiques parcours Recherche se fait par sélection sur dossier, suivi le cas échéant d'un entretien de motivation. **Toute candidature doit passer par la plateforme ecandidat :**

https://ecandidat.univ-lille.fr/

PHASE 2 : INSCRIPTION

Une fois que la décision d'acceptation dans la formation a été notifiée, l'**inscription administrative** se fait au début de l'année universitaire (le calendrier est en ligne sur le site de l'université de Lille : https://www.univ-lille.fr/etudes/candidater-sinscrire/) auprès des services administratifs de l'université.
Elle sera complétée, à la rentrée, par **l'inscription pédagogique** qui permet d'établir le contrat pédagogique de chaque étudiant et de l'inscrire aux examens correspondants (se rapprocher du secrétariat pédagogique).

ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT

SEMESTRE 3

BCC Maîtriser les concepts des mathématiques (Niveau approfondi 2) (Choix de 3 UE fondamentales parmi 7 dont au plus une UE de méthodes numériques)	Algèbre approfondie	9 ECTS
	Analyse approfondie	9 ECTS
	Géométrie approfondie	9 ECTS
	Introduction aux EDP non-linéaires	9 ECTS
	Probabilités approfondies	9 ECTS
	Méthodes numériques pour les EDP	9 ECTS
	Méthodes numériques pour les Probas-Stats	9 ECTS
BCC S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel	Séminaire d'étudiants en anglais	3 ECTS

SEMESTRE 4

BCC S'initier à la recherche dans le domaine des mathématiques (Choix de 2 UE parmi 7)	Cours approfondi de mathématiques pures 1	9 ECTS
	Cours approfondi de mathématiques pures 2	9 ECTS
	Cours approfondi de mathématiques pures 3	9 ECTS
	Cours approfondi en analyse numérique et EDP 1	9 ECTS
	Cours approfondi en analyse numérique et EDP 2	9 ECTS
	Cours approfondi en probabilités et statistiques 1	9 ECTS
	Cours approfondi en probabilités et statistiques 2	9 ECTS
BCC S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel	Mémoire de recherche (possibilité de faire un stage en plus du mémoire)	12 ECTS

PROGRAMME DES COURS

2020 - 2021

- **S3 : Algèbre approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Partie I (24h CM - 8h TD)

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :

- Anneaux et idéaux. Anneaux noethériens.
- Nullstellensatz : algébrique et géométriques.
- Théorème de Hilbert. Théorème de Krull.
- Nombres p-adiques.
- Modules de type fini. Applications aux réseaux et algorithmes.
- Produit tensoriel de modules et propriétés fonctorielles.
- Séries de Dirichlet, fonction zêta de Riemann, théorème des nombres premiers.
- Grand crible. Applications aux nombres premiers jumeaux.
- Sommes d'exponentielles. Applications aux formules asymptotiques et calculs de complexité.

- Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.

Bibliographie

[1] Atiyah et Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison Wesley, 1969, Addison-Wesley
[2] Artin, Algebra, 1991, Pearson.
[3] Serre, Cours d'arithmétique, 1994, PUF.
[4] Kowalski, Un cours de théorie analytique des nombres, 2006, SMF.

Evaluation

Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S3 : Analyse approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Partie I (24h CM - 8h TD)

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :

- Convergence faible (et préfaible) dans le cadre des espaces de Banach, exemple des mesures complexes comme dual de C(K) (théorème de Riesz).
- Réflexivité, étude d'exemples classiques (espaces de suites, espaces Lp).
- Espaces de Fréchet, exemples de $C^\infty(\Omega)$, $Hol(\Omega)$, S(Rn), distributions, etc.
- Théorème de Paley-Wiener (Fourier complexe).
- Equations différentielles complexes et fonctions spéciales.
- Fonctions harmoniques.
- Espaces de Hilbert de fonctions analytiques sur un ouvert de C ou Cn, noyau reproduisant, exemples (Hardy, Bergman, Dirichlet).
- Opérateurs sur les espaces de Hilbert, opérateurs à noyau, compacts.
- Valeurs propres et singulières des opérateurs.

- Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.

Bibliographie

[1] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications, Masson.
[2] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer.

[3] J. Cerda, Linear Functional Analysis, gsm 116, AMS.
[4] F. Hirsch, G. Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle, Dunod.
[5] W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw Hill.
[6] D. Li, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, Ellipses.

Evaluation
Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S3 : Géométrie approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Partie I (24h CM - 8h TD)

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :

- Sous-variétés de Rn.
- Variétés abstraites.
- Constructions de variétés (affines, projectives, actions de groupes).
- Formes différentielles sur les variétés. Différentiation. Lemme de Poincaré.
- Intégration des formes différentielles. Formule de Stokes.
- Lemme de Sard, degré.
- Fibrés vectoriels. Classification des fibrés sur S1 et S2.
- Cohomologie de de Rham.
- Indices des champs de vecteurs et nombre d'Euler. Formule de Hopf.
- Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.

Bibliographie
[1] Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, EDP Sciences 2010.
[2] Godbillon, Eléments de topologie algébrique, Hermann 1998.
[3] Chavel, Riemannian Geometry : a modern introduction, Cambridge University Press 2006.
[4] Bott-Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer 1982.
[5] Hirsch, Differential Topology, Springer, 1976.

Evaluation
Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S3 : Introduction aux EDP non-linéaires – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Espaces de Sobolev
  Inégalité de Poincaré. Théorèmes de trace et de recollement. Formule de Green. Injections de Sobolev. Théorème de Rellich.
- Etude théorique de problèmes elliptiques
  Théorème de Lax-Milgram, formulation variationnelle. Principe du maximum, régularité. Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur elliptique. Méthode de sur et sous solutions.
- Problèmes paraboliques
  Existence et unicité. Principe du maximum, régularité. Méthode de sur et sous solutions.
- Théorèmes de point fixe Thormes de Banach, Brouwer et Schauder.
  Applications aux EDP non linéaires.

- Equations de transport Solutions classiques, solutions faibles.
  Méthode des caractéristiques, solutions entropiques. Résolution du problème de Riemann. Application à l'équation de Burgers et au trafic routier.

Bibliographie

[1] R. Adams, J. Fournier, Sobolev spaces (second edition), Elsevier.
[2] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V. 19.
[3] M. E. Taylor, Partial Differential Equations I, II, III Applied Mathematical Sciences.
[4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Application, Dunod Université.
[5] D. Serre, Systèmes de lois de conservation, tomes i et ii, Cassini, 1996.
[6] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer.

Evaluation

Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S3 : Probabilités approfondies – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Processus stochastiques : théorème de Kolmogorov (admis), processus gaussiens, mouvement brownien, modification continue, propriétés des trajectoires.
- Introduction aux équations différentielles stochastiques : intégrale de Wiener, exemples simples d'EDS.
- Processus de Markov à sauts en temps continu : générateur, liens avec les chaînes de Markov, processus de Poisson, files d'attente.
- Inégalités de concentration : inégalités de Chernoff, Hoeffding, Bernstein, etc, applications.
- Grandes déviations : théorème de Cramer, principe de grandes déviations.

Bibliographie

[1] Bouleau, Processus Stochastiques et applications, Hermann.
[2] Claude Dellacherie, Pierre-Andre Meyer. Probabilités et potentiels. Hermann, 1975.
[3] D. Revuz et M. Yor, Continuous Martingales and Brownian motion, Springer.
[4] Karatzas et Shreeve, Brownian motion and stochastic calculus, Springer.
[5] I Florescu et C. Tudor, Handbook of Probability, Wiley.

Evaluation

Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S3 : Méthodes numériques pour les EDP - 20h de CM et 56h de TD**

Programme

Cette unité pédagogique est constituée de deux modules : Outils informatiques en en calcul scientifique et Théorie de l'apprentissage.

- ➢ Partie I (36h TD) : Outils informatiques en calcul scientifique
- Prise en main de python : rappels et compléments.
- Résolution de systèmes linéaires : méthodes directes, méthodes itératives.
- Méthodes de calcul de valeurs propres-vecteurs propres.
- Résolution d'équations non linéaires.
- Résolution approchée de l'équation de la chaleur.
- Différences finies pour l'approximation d'une équation elliptique 1D.

- Différences finies pour la résolution approchée de l'équation de la chaleur.

➢ Partie II (20h CM – 10h TD) : Finite elements methods
The aim of this course is to acquire the theoretical and practical backgrounds for the numerical approximation of (systems of) PDEs of elliptic, or parabolic types using Finite Element (FE) Methods. Content :

- Variational formulation of elliptic PDEs: strong/weak solutions; derivation of a variational formulation; well-posedness (coercive case; Lax-Milgram); equivalence with the strong form; treatment of different types of data (variable coefficients, homogeneous/non-homogeneous cases) and boundary conditions (pure Dirichlet, pure Neumann, mixed-type, Robin-type).
- Variational approximation of elliptic problems: general idea, vocabulary; well-posedness (matricial viewpoint); Céa's lemma (conforming case); general convergence theorem.
- P1/P2 FE in 1D : definition of a FE ; definition of the reduction, reconstruction, and interpolation operators; shape functions; stiffness and mass matrices computation; quadrature formulas (Newton-Cotes, Gauss-Legendre); imposition of boundary conditions; convergence theorems.
- P1/P2 /Q1 FE in 2/3D : notion of admissible mesh; barycentric coordinates; stiffness and mass matrices computation; assembly procedure; cubature formulas; convergence theorems
- Implementation of a 2D P1 FE method in C++ : use of Gmsh (mesher), and of various libraries (improved standard, linear algebra, visualization...); generic and object-oriented programming.
- Approximation of parabolic problems: diagonalization of the heat operator; Euler/FE time/space schemes (explicit and implicit versions); convergence theorems; CFL condition; mass lumping; implementation

Bibliographie

[1] G. Golub et C. Van loan : Matrix Computations, Johns Hopkins University Press
[2] G. Allaire et S.M. Kaber : Algèbre Linéaire Numérique. Cours et exercices, Paris Ellipses
[3] J.P. Demailly : Analyse Numérique et Equations Différentielles, EDP Sciences, Eyrolles
[4] P. Lascaux et R. Théodor : Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur, Dunod
[5] J.-B. Hiriart-Urruty : Optimisation et Analyse Convexe (résumé de cours, exercices et problèmes corrigés), editions EDP Sciences
[6] L. Di Menza : Analyse Numérique des Equations aux dérivées partielles, Cassini
[7] B. Lucquin : Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ellipses
[8] E. Hubert et J. Hubbard : Calcul Scientifique, Vuibert
[9] J.-E. Rombaldi : Interpolation et Approximation (cours et Exercices Résolus), Vuibert
[1] A. Quarteroni, P. Gervasio, F. Saleri: Calcul Scientifique (cours et exercices corrigés), Springer
[10] W. Gautschi: Numerical Analysis, BirkhäuserT. Gordon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul Scientifique, ISTE Editions
[11] G. Allaire : Numerical Analysis and Optimisation, Oxford University Press

Evaluation

Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S3 : Méthodes numériques pour les Probas-Stats - 20h de CM et 56h de TD**

Programme
Cette unité pédagogique est constituée de deux modules : Outils informatiques en Proba-Stats et Théorie de l'apprentissage.

- Partie I (36h TD) : Outils informatiques en Proba-Stats
- Estimation paramétrique, intervalle de confiance.
- Méthodes de Monte-Carlo.
- Fonction de répartition empirique.
- Processus de Poisson.
- Chaînes de Markov.
- Partie II (20h CM – 10h TD) : Théorie de l'apprentissage
  L'objectif de ce cours est de savoir calculer des bornes sur les risques théoriques des méthodes d'apprentissage.
- Rappel sur les inégalités de concentration
- Risque théorique et empirique en apprentissage
- Nombres de croissance et dimension de Vapnik-Chervonenkis
- Complexité de Rademacher
- Nombres de couverture et dimension de pulvérisation

Bibliographie
[1] Processus de Markov et Applications. Algorithmes, réseaux, génome et finance. Etienne Pardoux.
[2] Exercice de probabilités : Licence - Master - Ecole d'ingénieurs. Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre.
[3] Statistique mathématique en action. Vincent Rivoirard et Gilles Stoltz.

Evaluation
Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S3 : Séminaire d'étudiants en anglais – 24h de TD**

Programme
Le séminaire d'étudiants comprend des séances en Anglais basées sur la lecture de livres de mathématiques ou d'articles de recherche. Les étudiants sont amenés à faire des exposés en Anglais.

Evaluation
Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 1 : Géométrie des espaces symétriques, rigidité - 32h de CM et 8h de TD**

Programme
Le cours porte sur la géométrie riemannienne des espaces symétriques. Les espaces symétriques sont les variétés riemanniennes pour lesquelles les symétries centrales sont des isométries. On s'intéressera surtout aux espaces symétriques non-compacts. On décrira leur courbure, leurs géodésiques et leurs sous-espaces plats. Ces derniers induisent une structure d'immeuble de Tits au bord `a l'infini des espaces symétriques. Cette structure joue un role essentiel dans les théorèmes de rigidité de Mostow, Margulis et autres. En fonction du temps

on abordera quelques-uns de ces phénomènes de rigidité.

Bibliographie

[1] A. Borel, Semisimple groups and Riemannian symmetric spaces, Texts and Readings in Mathematics, vol. 16, Hindustan Book Agency, 1998.

[2] M. Bridson and A. Haefliger, Metric spaces of nonpositive curvature, Grund. Math. Wiss., vol. 319, Springer, 1999.

[3] K. S. Brown, Buildings, Springer 1989.

[4] Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités, Edité par L. Bessières, A. Parreau et B. Rémy, Séminaires et congrès 18, SMF 2009.

Evaluation

Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 2 : Nombres p-adiques et fonctions zêta- 32h de CM et 8h de TD**

Programme

Nous allons introduire le corps de nombres p-adiques qui est une complétion non archimédienne des nombres rationnels avec des analogies importantes ainsi que contrastes remarquables avec celui des nombres réels. Certaines des propriétés rencontrées sont contre-intuitives, par exemple, l'absence de lien entre les dérivés et les intégrales. Bien qu'il existe plusieurs notions différentes de l'intégration sur les nombres p-adiques, nous allons souvent nous concentrer sur les intégrales par rapport à une mesure, invariantes sous l'addition et appelée la mesure de Haar, qui ressemblent aux intégrales sur les réels. La fonction zêta d'Igusa est un exemple particulièrement riche à étudier. Les techniques p-adiques ont des applications en théorie des nombres (par exemple dans la résolution d'équations entiers modulo une puissance d'un nombre premier), en analyse (par exemple les transformées de Fourier et les sommes exponentielles), en géométrie algébrique (par exemple les nombres de Betti des variétés algébriques) et également dans le développement de géométries riches, certaines plus semblables à la géométrie réelle, d'autres à la géométrie algébrique. Comme cas spécifique, nous présenterons des interpolations p-adiques de la fonction zêta de Riemann et la construction de la fonction zêta p-adique due à Kubota et Leopoldt. Nous décrirons la preuve p-adique de Dwork de la rationalité de la fonction zêta d'une variété algébrique sur un corps fini. Notons que de nombreux sujets de recherches contemporaines se situent dans le monde p-adique, et qu'il existe bien des questions ouvertes !

Bibliographie

[1] J. Igusa, Introduction to the theory of local zeta functions, Studies in Advanced Mathematics 14, 2000.

[2] N. Koblitz, p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1984. https://sites.math.northwestern.edu/mpopa/571/chapter3.pdf.

[3] M. Ram Murty, Introduction to p-adic analytic number theory, Studies in Advanced Mathematics 27, AMS, 2002.

[4] A. M. Robert, A course in p-adic analysis, Graduate Texts in Mathematics, 198. Springer-Verlag, New York, 2000.

Evaluation
Les modalités d’évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 3 : Théorie ergodique, théorie des courants et dynamique holomorphe - 32h de CM et 8h de TD**

Programme
L'objectif de ce cours est de présenter une introduction à la théorie des systèmes dynamiques dans une variable complexe, avec une approche qui reste valable en toute dimension (et aussi dans de nombreux autres contextes). L'accent est mis sur les outils, qui ont de larges applications dans d'autres domaines aussi.
Seules des connaissances de base en analyse complexe, théorie des mesures et intégration sont nécessaires. Des connaissances de base en probabilité sont utiles mais pas nécessaires.

- Théorie ergodique : entropie topologique, mesures invariantes, ergodicité. Exemples.
- Théorie du potentiel : potentiel d'une mesure, propriétés des fonctions sousharmoniques.
- Application : dynamique des polynômes complexes et applications rationnelles, théorie globale. Dichotomie Fatou-Julia, construction de la mesure d'équilibre, propriétés ergodiques et statistiques de la mesure d'équilibre.
- Théorie du pluripotentiel et courants. Fonctions holomorphes à plusieurs variables. Fonctions pluri-sousharmoniques. Nombres de Lelong et théorème de Siu.
- Application : dynamique des endomorphismes holomorphes d'espaces projectifs complexes.

Bibliographie
[1] Beardon A., Iteration of rational functions. Complex analytic dynamical systems, Graduate Texts in Mathematics, 132, Springer-Verlag, New York, 1991.
[2] Berteloot F., Mayer V., Rudiments de dynamique holomorphe, Paris, EDP Sciences, Les Ulis, 2001.
[3] Carleson L., Gamelin T.W., Complex dynamics, Universitext: Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993.
[4] Demailly J.-P., Complex analytic geometry, available at www.fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly.
[5] Dinh T.-C., Sibony, Dynamics of holomorphic maps, available at https://webusers.imj-prg.fr/~tien-cuong.dinh/
[6] Dinh T.-C., Sibony N., Dynamics in several complex variables: endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings, Lecture Notes in Math., 1998, Springer, Berlin, 2010.
[7] Walters P., An introduction to ergodic theory. Graduate texts in mathematics 79, Springer, New York, 1982.

Evaluation
Les modalités d’évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi en analyse numérique et EDP 1 : Une introduction mathématique et numérique à la théorie cinétique - 32h de CM et 8h de TD**

Programme
La théorie cinétique vise à décrire des systèmes de particules en interaction comme des gaz, des plasmas ou même des anneaux planétaires, de manière statistique, en utilisant des

équations aux dérivées partielles ou des équations intégro-différentielles. C'est l'un des piliers de la physique et des mathématiques modernes, et un domaine de recherche jeune et très actif. Le but principal de ce cours est d'introduire les motivations principales, les applications, les grandes méthodes, et certains problèmes ouverts en théorie cinétique. Nous nous focaliserons d'un côté sur les méthodes mathématiques et les outils nécessaires pour l'étude du problème de Cauchy et du comportement qualitatif d'équations cinétiques. D'un autre côté, nous introduirons les méthodes numériques pour la résolution de telles équations, à travers des implémentations pratiques en Python lors de TP.

- Cours (32h).
  - Introduction (motivations, applications, modèles) ;
  - Équations de transport (méthode des caractéristiques, lemmes de moyennes, de dispersion) ;
  - Équations de type Vlasov (établissement de l'équation de champ moyen de Vlasov, introduction formelle aux modèles de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell pour les plasmas, stabilité des solutions faibles de Vlasov-Poisson) ;
  - Équations de type Boltzmann (caractère bien posé de l'équation de Boltzmann linéaire, forme faible et invariants de l'opérateur de Boltzmann, Théorème H, limites hydrodynamiques).
- Lecture d'article. Étude d'un sujet additionnel (conditions aux limites, hypocoercivité, amortissement Landau linéaire, schémas numériques préservant les comportements asymptotiques, limites de diffusion, schéma « particle-in-cell », etc.) via la lecture d'un article scientifique et d'une présentation orale.
- Travaux pratiques (8h). Implémentation pratique de méthode numériques représentant l'état de l'art pour des modèles cinétiques classiques :
  - Méthode semi-lagrangienne pour l'équation de Vlasov ;
  - Méthode spectrale rapide pour l'équation de Boltzmann homogène

Bibliographie

[1] C. Villani, A Review of Mathematical Topics in Collisional Kinetic Theory, in Handbook of mathematical fluid dynamics, pp. 71–305, 2002.
[2] L. Saint-Raymond, Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation, Springer Science & Business Media, 2009.
[3] G. Dimarco, L. Pareschi, Numerical methods for kinetic equations, Acta Numerica, 23, 369-520, 2014.
[4] R. T. Glassey, The Cauchy problem in kinetic theory, SIAM, 1996.
[5] F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti. Kinetic equations and asymptotic theory, 2000.

Evaluation

Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi en analyse numérique et EDP 2 : Condensats de Bose-Einstein : théorie et simulation numérique - 32h de CM et 8h de TD**

Programme

On propose dans ce cours une introduction à la modélisation et à la simulation numérique des condensats de Bose-Einstein qui traduisent le comportement superfluide d'origine quantique d'une population de bosons en interaction à très basse température dans un potentiel électrique confinant.

D'un point de vue théorique, on introduit les notions de base permettant d'arriver à la formulation de l'équation de Gross-Pitaevskii. On discute en fonction de la nature des interactions des propriétés des points critiques de la fonctionnelle d'énergie associée. On fait en particulier une étude qualitative théorique détaillée du minimiseur de l'énergie. On

présente également quelques aspects de la dynamique de l'équation de Gross-Pitaevsksii. S'il reste du temps, on pourra parler également de la mise en rotation des condensats et de la minimisation de l'énergie dans le repère tournant (en 2D).
D'un point de vue numérique, on introduit diverses méthodes de discrétisation afin d'obtenir des solutions approchées des points critiques de l'énergie de l'équation de Gross-Pitaevskii (méthode de tir, méthode du « temps imaginaire »). On présente également des méthodes de résolution numérique en temps de l'équation de Gross-Pitaevskii (méthodes de décomposition). Enfin, s'il reste du temps, on dira quelques mots des méthodes existantes pour le calcul des condensats en rotation (en 2D).

Bibliographie

[1] A. Aftalion, Vortices in Bose-Einstein condensates, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol 67 (2006), Springer.
[2] E. Hairer, G. Wanner and C. Lubich, Geometric Numerical Integration, Springer Series in Computational Mathematics, Vol 31 (2006), Springer.

Evaluation

Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi en probabilités et statistiques 1 : Introduction à la théorie des processus ponctuels de Gibbs - 32h de CM et 8h de TD**

Programme

Les processus ponctuels de Gibbs constituent une large classe de processus ponctuels avec interaction entre les points. L'interaction peut être attractive, répulsive ou un mélange des deux également. L'interaction nulle correspond au processus ponctuel de Poisson qui est la façon naturelle de jeter indépendamment des points dans un espace. Ces processus ont de nombreuses applications en science des données, physique statistique, astronomie afin de modéliser ou représenter des structures aléatoires plus ou moins ordonnées. Nous analyserons ces modèles en détails d'un point de vue probabiliste et statistique.

- Théorie générale des processus ponctuels
- Le processus ponctuel de Poisson spatial
- Les processus de Gibbs en volume fini
- Les processus de Gibbs en volume infini
- Unicité/non-unicité. Transition de Phase
- Etude statistique des processus de Gibbs.

Bibliographie

[1] D.J. Daley and D. Vere-Jones, An Introduction to the Theory of point Processes (1988), Wiley.
[2] D. Dereudre, Introduction to the theory of Gibbs point processes. arXiv : 1701.08105. To appear in a volume of the Lecture Notes in Mathematics, CEMPI subseries.

Evaluation

Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi en probabilités et statistiques 2 : Concentration de la mesure et applications - 32h de CM et 8h de TD**

Programme

Ce cours présente quelques approches permettant d'obtenir ces outils puissants que sont les inégalités de concentration. Dans un second temps, des applications sont proposées dans quelques domaines sélectionnés : compressed sensing, réduction de dimension, statistical learning.

- Inégalités de concentration : comment les obtenir ? Les approches et résultats ([3, 4, 5, 6])
  1) Markov (exponentiel) et somme de variables aléatoires indépendantes : inégalités de Hoeffding, Bennett, Bernstein
  2) Méthodes de martingales : inégalités d'Azuma, Mc Diarmid
  3) Isopérimétrie gaussienne : inégalité de Borell-Sudakov-Tsirelson
  4) Méthodes d'entropie : argument de Herbst, tensorisation, mesure produit
  5) Méthodes de transport : inégalité de distance convexe, inégalité de transport gaussien.
- Applications sélectionnées ([1, 2, 5, 7]) :
  1) Réduction de dimension : lemme de Johnson-Lindenstrauss
  2) Estimation de covariance et complétion de matrices
  3) Récupération d'un signal "sparse"
  4) Complexité de Rademacher

Bibliographie

[1] Amini M-R, Apprentissage machine, Eyrolles, 2014.

[2] Bartlett p., Lectures notes, https://people.eecs.berkeley.edu/˜bartlett/courses/ 281b-sp08/

[3] Boucheron S., Lugosi G., Massart P., Concentration inequalities, Oxford, 2013.

[4] Ledoux M. The concentration of measure phenomenon, AMS, 2001.

[5] Tropp J.A., An introduction to matrix concentration inequlities, https://arxiv.org/pdf/1501.01571.pdf

[6] Vershynin R., High-dimensional probability, 2018. https://www.math.uci.edu/˜rvershyn/

[7] Vershynin R., Four lectures on probabilistic methods for data science, https://arxiv.org/abs/1612.06661.

Evaluation

Les modalités d'évaluation seront communiquées ultérieurement.