
MASTER 2 Sciences, Technologies, Santé

Mention Mathématiques

Parcours Recherche

En co-accréditation avec l'Université d'Artois et

avec l'Université Polytechnique Hauts-de-France

Année universitaire 2025 – 2026

Laboratoire Paul Painlevé - Université de Lille (CNRS UMR 8524)
Laboratoire de Mathématiques de Lens - Université d'Artois (UR 2462)
Laboratoire de Matériaux Céramiques et de Mathématiques CERAMATHS – Département DMTHS - UPHF

https://sciences-technologies.univ-lille.fr/les-departements-de-formation/mathematiques/

RESPONSABLE LILLE

Mylène MAIDA
mylene.maida@univ-lille.fr
Université de Lille
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Mathématiques
59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

SECRETARIAT | Stéphanie NINIVE
math-masters2@univ-lille.fr
Tel. 03.20.43.42.33

RESPONSABLE VALENCIENNES | Serge NICAISE
Université Polytechnique Hauts-de-France
CERAMATHS/DMATHS - Abel de Pujol 2
Le Mont Houy
59313 VALENCIENNES Cedex 9

SECRETARIAT | Fatiha Meziane
fatiha.meziane@uphf.fr
Tel. 03.27.51.19.01

RESPONSABLE LENS-ARTOIS | Yaël FREGIER
Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Rue J. Souvraz, SP 18
F-62307 LENS CEDEX

OBJECTIFS

Le **Master Mathématiques** offre une formation approfondie en mathématiques et fournit un bagage solide et de haut niveau en mathématiques. Le parcours **Recherche** permet l'acquisition de connaissances approfondies dans des thématiques de recherche contemporaines en mathématiques. Les choix des cours proposés permettent aux étudiant.es de bénéficier d'un premier contact avec des problématiques de recherche en mathématiques, allant des mathématiques pures jusqu'aux mathématiques appliquées.

La formation est centrée sur les cinq domaines des mathématiques pures et appliquées représentés dans les laboratoires :

- Analyse
- Analyse numérique et équations aux dérivées partielles
- Arithmétique et géométrie algébrique
- Géométrie et topologie
- Probabilités et statistiques

Le parcours recherche fait partie du programme gradué "Information and Knowledge Society" (GP-IKS) : https://graduate-programmes.univ-lille.fr/graduate-programmes/societe-de-linformation-et-de-la-connaissance

DEBOUCHES

Le parcours **Recherche** s'inscrit principalement dans le monde de la recherche et de l'enseignement. Il prépare aux fonctions d'enseignant et de chercheur. Par sa poursuite en doctorat, le Master permet d'envisager une carrière d'enseignant.-chercheu.r.se en Mathématiques dans l'enseignement supérieur, ou de chercheu.r.se dans un laboratoire de recherche public (CNRS, INRIA, etc) ou privé et, plus généralement, dans des sociétés de services ayant besoin de mathématicien.nes.

Pour préparer une thèse de doctorat :

Un nombre limité de contrats doctoraux de 3 ans peuvent être établis. Leurs sources de financement sont : Allocations de recherche du Ministère, bourse du CDP C2EMPI, bourses CNRS, bourses de la Région, bourses CIFRE, bourses financées par des programmes institutionnels. Une rémunération complémentaire pour service d'enseignement peut également être envisagée.

Candidature : Les règles du concours d'attribution des allocations de thèse et le dossier à télécharger se trouvent sur le site de l'Ecole Doctorale MADIS (https://edmadis.univ-lille.fr/). L'étudiant choisit un sujet de thèse (la liste se trouvant sur les sites web des laboratoires), se met en contact avec un.e directrice ou un directeur de thèse et lui adresse un dossier complet (cf calendrier en ligne).

BOURSES

Vous pouvez candidater aux bourses d'excellence proposées par le programme gradué GP-IKS. La procédure de candidature est précisée sur la page web du GP : https://international.univ-lille.fr/en/graduate-programmes/information-and-knowledge-society/

Il y a deux appels par an pour ces bourses, **en mars et en mai**.

ADMISSIONS

PHASE 1 : CANDIDATURE (PRÉ-REQUIS ET PUBLIC CONCERNÉ)

S'agissant des étudiant.es ayant validé le master 1 de la mention Mathématiques de l'Université de Lille, l'accès au master 2 Mathématiques parcours Recherche est de droit ; il vous appartiendra donc de procéder directement à votre inscription administrative (cf phase 2).

S'agissant des étudiant.es ayant validé un autre master 1 d'un parcours national de master dans une mention compatible (Mathématiques fondamentales ou appliquées) ou un diplôme à l'étranger, l'accès en master 2 Mathématiques parcours Recherche se fait par sélection sur dossier, soit via la plateforme Etudes en France (si le pays de votre dernier diplôme est éligible) soit via **la plateforme ecandidat :**

https://ecandidat.univ-lille.fr/

PHASE 2 : INSCRIPTION

Une fois que la décision d'acceptation dans la formation a été notifiée, l'**inscription administrative** se fait au début de l'année universitaire (le calendrier est en ligne sur le site de l'université de Lille : https://www.univ-lille.fr/etudes/candidater-sinscrire/) auprès des services administratifs de l'université.
Elle sera complétée, à la rentrée, par **l'inscription pédagogique** qui permet d'établir le contrat pédagogique de chaque étudiant et de l'inscrire aux examens correspondants (se rapprocher du secrétariat pédagogique).

ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT

SEMESTRE 3

BCC Maîtriser les concepts des mathématiques (Niveau approfondi 2) (Choix de 3 UE fondamentales parmi 7 dont au plus une UE de méthodes numériques)	Algèbre approfondie	9 ECTS
	Analyse approfondie	9 ECTS
	Géométrie approfondie	9 ECTS
	Introduction aux EDP non-linéaires	9 ECTS
	Probabilités approfondies	9 ECTS
	Méthodes numériques pour les EDP	9 ECTS
	Méthodes numériques pour les Probas-Stats	9 ECTS
BCC S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel	Séminaire d’étudiants en anglais	3 ECTS

SEMESTRE 4

BCC S'initier à la recherche dans le domaine des mathématiques (Choix de 2 UE parmi 5)	Cours approfondi de mathématiques pures 1	9 ECTS
	Cours approfondi de mathématiques pures 2	9 ECTS
	Cours approfondi de mathématiques pures 3	9 ECTS
	Cours approfondi en analyse numérique et EDP	9 ECTS
	Cours approfondi en probabilités et statistiques	9 ECTS
BCC S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel	Mémoire de recherche (possibilité de faire un stage en plus du mémoire)	12 ECTS

PROGRAMME DES COURS

2025 - 2026

- **S3 : Algèbre approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

Le sujet principal de ce cours est l'algèbre commutative, c'est-à-dire la théorie des anneaux et ses applications. Les deux tiers du cours seront consacrés à l'étude des notions et structures fondamentales du domaine. Le tiers restant sera consacré à des thèmes d'approfondissement ou à des applications. Le plan ci-dessous fournit une liste de sujets d'approfondissement possibles. Ces approfondissements pourront être traités en cours ou faire l'objet d'exposés d'étudiants. Les choix seront faits en fonction des projets des étudiants. Il s'agira de faire la jonction avec les cours du second semestre ou d'apporter des compléments de connaissances.

➢ Notions fondamentales
    - Anneaux et idéaux
      – Définition de la structure et exemples (révisions et compléments), anneaux principaux et euclidiens, anneaux factoriels.
      – Anneaux noethériens. Le théorème de la base de Hilbert
      – Idéaux premiers et maximaux. Dimension de Krull d'un anneau
    - Modules sur les anneaux
      – Définition de la structure et exemples. Opérations sur les modules. Modules noethériens
      – Présentation des modules par générateurs et relations. Syzygies et résolutions
      – Classification des modules de type fini sur un anneau principal
    - Anneaux et modules de fractions, localisation

➢ Thèmes d'approfondissement
    - Bases de Gröbner et méthodes effectives dans les anneaux de polynômes. Algorithme de Buchberger. Applications au calcul des syzygies
    - Introduction à la géométrie algébrique. Nullstellensatz. Faisceaux et variétés algébriques.
    - Etude des courbes algébriques planes et de leurs singularités
    - Etude des anneaux d'entiers de corps de nombres. Structure d'anneau de Dedekind. Unités et groupes de classes d'idéaux dans les anneaux d'entiers de corps de nombres
    - Nombres p-adiques. Construction. Lemme de Hensel. Groupe des unités. Théorème d'Hasse-Minkowski et principe local-global.
    - . . .

Bibliographie

[1] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald. Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley, 1969.
[2] E. Casas-Alvero. Algebraic curves, the Brill and Noether way. Springer, 2019.
[3] C. Ciliberto. An undergraduate primer to algebraic geometry. Springer, 2021.
[4] D. Eisenbud. Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, 2004.
[5] W. Fulton. Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry. W.A. Benjamin inc., 1969.
[6] D. Perrin. Géométrie algébrique. Une introduction. CNRS Editions, Paris, 1995.
[7] M. Reid. Undergraduate commutative algebra. Cambridge Univ. Press, 2012.
[8] M. Reid. Undergraduate commutative algebra. Cambridge Univ. Press, 2012.
[9] P. Samuel. Théorie algébrique des nombres, Hermann, Paris, 1967.
[10] J.-P. Serre. Cours d'arithmétique. Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) seront précisées en début de semestre. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1, (Ex1+CC)/2).

- **S3 : Analyse approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Partie I (24h CM - 8h TD)

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :

- Convergence faible (et préfaible) dans le cadre des espaces de Banach, exemple des mesures complexes comme dual de C(K) (théorème de Riesz).
- Réflexivité, étude d'exemples classiques (espaces de suites, espaces Lp).
- Espaces de Fréchet, exemples de C∞(Ω), Hol(Ω), S(Rn), distributions, etc.
- Théorème de Paley-Wiener (Fourier complexe).
- Equations différentielles complexes et fonctions spéciales.
- Fonctions harmoniques.
- Espaces de Hilbert de fonctions analytiques sur un ouvert de C ou Cn, noyau reproduisant, exemples (Hardy, Bergman, Dirichlet).
- Opérateurs sur les espaces de Hilbert, opérateurs à noyau, compacts.
- Valeurs propres et singulières des opérateurs.

- Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.

Bibliographie

[1] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications, Masson.
[2] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer.
[3] J. Cerda, Linear Functional Analysis, gsm 116, AMS.
[4] F. Hirsch, G. Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle, Dunod.
[5] W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw Hill.
[6] D. Li, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, Ellipses.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) seront précisées en début de semestre. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1, (Ex1+CC)/2).

- **S3 : Géométrie approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Partie I (24h CM - 8h TD)

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :

- Sous-variétés de Rn.
- Variétés abstraites.
- Constructions de variétés (affines, projectives, actions de groupes).
- Formes différentielles sur les variétés. Différentiation. Lemme de Poincaré.
- Intégration des formes différentielles. Formule de Stokes.
- Lemme de Sard, degré.
- Fibrés vectoriels. Classification des fibrés sur S1 et S2.

- Cohomologie de de Rham.
- Indices des champs de vecteurs et nombre d'Euler. Formule de Hopf.
- Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.

Bibliographie

[1] Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, EDP Sciences 2010.
[2] Godbillon, Eléments de topologie algébrique, Hermann 1998.
[3] Chavel, Riemannian Geometry : a modern introduction, Cambridge University Press 2006.
[4] Bott-Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer 1982.
[5] Hirsch, Differential Topology, Springer, 1976.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) seront précisées en début de semestre. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S3 : Introduction aux EDP non-linéaires – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Espaces de Sobolev
  Inégalité de Poincaré. Théorèmes de trace et de recollement. Formule de Green. Injections de Sobolev. Théorème de Rellich.
- Etude théorique de problèmes elliptiques
  Théorème de Lax-Milgram, formulation variationnelle. Principe du maximum, régularité. Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur elliptique. Méthode de sur et sous solutions.
- Problèmes paraboliques
  Existence et unicité. Principe du maximum, régularité. Méthode de sur et sous solutions.
- Théorèmes de point fixe : Théorèmes de Banach, Brouwer et Schauder.
  Applications aux EDP non linéaires.
- Equations de transport Solutions classiques, solutions faibles.
  Méthode des caractéristiques, solutions entropiques. Résolution du problème de Riemann. Application à l'équation de Burgers et au trafic routier.

Bibliographie

[1] R. Adams, J. Fournier, Sobolev spaces (second edition), Elsevier.
[2] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V. 19.
[3] M. E. Taylor, Partial Differential Equations I, II, III Applied Mathematical Sciences.
[4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Application, Dunod Université.
[5] D. Serre, Systèmes de lois de conservation, tomes i et ii, Cassini, 1996.
[6] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) seront précisées en début de semestre. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S3 : Probabilités approfondies – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Processus stochastiques : théorème de Kolmogorov (admis), processus gaussiens, mouvement brownien, modification continue, propriétés des trajectoires.
- Introduction aux équations différentielles stochastiques : intégrale de Wiener, exemples simples d'EDS.
- Processus de Markov à sauts en temps continu : générateur, liens avec les chaînes de Markov, processus de Poisson, files d'attente.

- Inégalités de concentration : inégalités de Chernoff, Hoeffding, Bernstein, etc, applications.
- Grandes déviations : théorème de Cramer, principe de grandes déviations.

Bibliographie

[1] Bouleau, Processus Stochastiques et applications, Hermann.
[2] Claude Dellacherie, Pierre-Andre Meyer. Probabilités et potentiels. Hermann, 1975.
[3] D. Revuz et M. Yor, Continuous Martingales and Brownian motion, Springer.
[4] Karatzas et Shreeve, Brownian motion and stochastic calculus, Springer.
[5] I Florescu et C. Tudor, Handbook of Probability, Wiley.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) seront précisées en début de semestre. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S3 : Méthodes numériques pour les EDP - 20h de CM et 46h de TD**

Programme

Cette unité pédagogique est constituée de deux modules : Outils informatiques en en calcul scientifique et Finite elements methods.

- Partie I (36h TD) : Outils informatiques en calcul scientifique
- Prise en main de python : rappels et compléments.
- Résolution de systèmes linéaires : méthodes directes, méthodes itératives.
- Méthodes de calcul de valeurs propres-vecteurs propres.
- Résolution d'équations non linéaires.
- Résolution approchée de l'équation de la chaleur.
- Différences finies pour l'approximation d'une équation elliptique 1D.
- Différences finies pour la résolution approchée de l'équation de la chaleur.

- Partie II (18h CM – 13h TD) : Finite elements methods
  Description
  This course is concerned with the theoretical and practical aspects of the numerical approximation of elliptic/parabolic PDEs using Finite Element Methods.

  Contents
  - Mathematical pre-requisites: Hilbertian analysis and convex optimization; Sobolev spaces (trace theorem, duality, Poincaré inequalities)
  - Variational formulation of elliptic PDEs: strong/weak solutions; well-posedness (coercive case); essential/natural boundary conditions
  - Variational approximation of elliptic problems: internal approximation; matricial viewpoint; Céa's lemma; general convergence theorem
  - Finite elements: definition of a FE (unisolvence, shape functions); reduction/reconstruction/interpolation operators; stiffness/mass matrices
  - Lagrange FE in 1D: algebraic realization (quadrature formulas, static condensation); convergence theorems (interpolation, duality techniques)
  - Lagrange FE in 2D/3D: barycentric coordinates; algebraic realization (assembly procedure, cubature formulas); convergence theorems (interpolation, mesh regularity)
  - Implementation of 1D Lagrange FE in Matlab/Octave
  - Approximation of parabolic problems: diagonalization of the heat operator; Euler/FE time/space schemes; convergence theorems; algebraic realization (CFL condition, mass lumping)
  - Project in C/C++ (2D, use of Gmsh)

Bibliographie

[1] G. Golub et C. Van loan : Matrix Computations, Johns Hopkins University Press
[2] G. Allaire et S.M. Kaber : Algèbre Linéaire Numérique. Cours et exercices, Paris Ellipses
[3] J.P. Demailly : Analyse Numérique et Equations Différentielles, EDP Sciences, Eyrolles
[4] P. Lascaux et R. Théodor : Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur, Dunod
[5] J.-B. Hiriart-Urruty : Optimisation et Analyse Convexe (résumé de cours, exercices et problèmes corrigés), editions EDP Sciences
[6] L. Di Menza : Analyse Numérique des Equations aux dérivées partielles, Cassini
[7] B. Lucquin : Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ellipses
[8] E. Hubert et J. Hubbard : Calcul Scientifique, Vuibert
[9] J.-E. Rombaldi : Interpolation et Approximation (cours et Exercices Résolus), Vuibert
[10] A. Quarteroni, P. Gervasio, F. Saleri: Calcul Scientifique (cours et exercices corrigés), Springer
[11] W. Gautschi: Numerical Analysis, BirkhäuserT. Gordon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul Scientifique, ISTE Editions
[12] G. Allaire : Numerical Analysis and Optimisation, Oxford University Press

Evaluation

Pour la partie I, le contrôle continu (CC) sera constitué d'évaluations de projets tout au long du semestre. L'examen final (Ex1) durera 3h et la note de l'EC sera (Ex1+CC)/2.

Pour la partie II, l'évaluation se fera sur la base d'un examen final écrit de 3h (EXA) et d'un projet à réaliser en autonomie (PRO). La note de l'EC sera 1/3*EXA+2/3*PRO.

La note de l'UE sera la moyenne des deux notes.

- **S3 : Méthodes numériques pour les Probas-Stats - 20h de CM et 56h de TD**

Programme

Cette unité pédagogique est constituée de deux modules : Outils informatiques en Proba-Stats et Théorie de l'apprentissage.

➢ Partie I (36h TD) : Outils informatiques en Proba-Stats
- Estimation paramétrique, intervalle de confiance.
- Méthodes de Monte-Carlo.
- Fonction de répartition empirique.
- Processus de Poisson.
- Chaînes de Markov.

➢ Partie II (20h CM – 20h TD) : Théorie de l'apprentissage
L'objectif de ce cours est de savoir calculer des bornes sur les risques théoriques des méthodes d'apprentissage.
- Rappel sur les inégalités de concentration
- Risque théorique et empirique en apprentissage
- Nombres de croissance et dimension de Vapnik-Chervonenkis
- Complexité de Rademacher
- Nombres de couverture et dimension de pulvérisation

Bibliographie

[1] Processus de Markov et Applications. Algorithmes, réseaux, génome et finance. Etienne Pardoux.
[2] Exercice de probabilités : Licence - Master - Ecole d'ingénieurs. Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre.
[3] Statistique mathématique en action. Vincent Rivoirard et Gilles Stoltz.

Evaluation

La partie I sera évaluée par un examen final de 3h. La partie II également. La note de l'UE est la moyenne des deux notes.

- **S3 : Séminaire d'étudiants en anglais – 24h de TD**

Programme
Le séminaire d'étudiants comprend des séances en Anglais basées sur la lecture de livres de mathématiques ou d'articles de recherche. Les étudiant.es sont amenés à faire des exposés en Anglais.

Evaluation
L'évaluation sera basée sur un exposé et un mémoire en anglais rendu pendant le semestre.

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 1 : Dynamique des groupes d'automorphismes - 32h de CM et 8h de TD**

Programme

Ce cours a pour but d'étudier la dynamique de divers groupes d'automorphismes ; par *dynamique*, on entendra ici l'étude des *flots* d'un groupe, c'est-à-dire ses actions continues sur des espaces topologiques compacts. On étudiera notamment les groupes suivants : le groupe S_∞ des permutations de $\mathbf{N}$; le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}, <)$ des bijections de $\mathbf{Q}$ préservant l'ordre ; le groupe unitaire $U(H)$ de l'espace de Hilbert séparable ; le groupe $\mathrm{Aut}([0, 1], \lambda)$ des bijections mesurables de $[0, 1]$ préservant la mesure de Lebesgue... Ces groupes topologiques non-localement compacts peuvent présenter des propriétés dynamiques curieuses qui n'existent pas chez les groupes localement compacts : extrême moyennabilité (tout flot admet un point fixe), unique ergodicité (tout flot minimal admet une unique mesure de probabilité invariante)... Les méthodes utilisées sont assez éloignées des méthodes « classiques » de dynamique ; elles relèvent plutôt de la combinatoire et des probabilités. On utilisera en particulier :

- la théorie de Ramsey, qui étudie les coloriages finis de structures mathématiques et en particulier l'existence de sous-structures monochromes pour ceux-ci ;
- les inégalités de concentration, qui assurent que dans de nombreux cas, les variables aléatoires réelles définies sur des ensembles de grande dimension sont proches de leur espérance avec haute probabilité.

Prérequis : Des bases de topologie générale peuvent aider, mais les définitions seront s'il le faut réintroduites en cours. Aucun cours du S3 n'est nécessaire ; cependant, avoir suivi le cours de probabilités avancées est un choix cohérent.

Plan du cours : Ce plan est approximatif et pourra être adapté selon le temps disponible et les connaissances et envies des étudiant·es. En particulier, il n'est pas clair que le chapitre IV soit traité.

I. Généralités sur les groupes topologiques et leurs flots

- Groupes topologiques, flots, applications équivariantes (morphismes de flots), flots minimaux.
- Mesures invariantes, moyennabilité, unique ergodicité.
- Extrême moyennabilité. Flot minimal universel : existence et unicité.

II. Concentration et extrême moyennabilité

- Familles de Lévy (familles d'espaces satisfaisant des inégalités de concentration). Lien avec l'extrême moyennabilité.
- Inégalité de concentration de Maurey pour les groupes de permutations finies. Extrême moyennabilité de $\mathrm{Aut}([0, 1], \lambda)$.
- Concentration gaussienne. Inégalité de concentration de Milman pour les sphères unités des espaces euclidiens. Extrême moyennabilité de $U(H)$.

III. S_∞ et $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}, <)$

- Théorème de Ramsey fini.
- Correspondance de Kechris–Pestov–Todorcevic entre l'extrême moyennabilité du groupe d'automorphismes d'une structure ultrahomogène et propriété de Ramsey pour ses sous- structures finies. Corollaire (Pestov) : extrême moyennabilité de Aut(**Q**, <).
- Théorème de Glasner–Weiss : le flot minimal universel de S_∞ est l'espace des ordres totaux sur **N**. Unique ergodicité de S_∞.

IV. Le graphe de Rado

- Définition probabiliste du graphe de Rado R et de sa version ordonnée $R_<$. Unicité et ultrahomogénéité.
- Théorèmes de Hales–Jewett (Ramsey pour les mots finis) et de Nešetřil–Rödl (Ramsey pour les graphes finis).
- Extrême moyennabilité de Aut($R_<$). Description du flot minimal universel de Aut(R).
- Caractérisation des ordres aléatoires cohérents sur les graphes finis. Théorème d'Angel–Kechris–Lyons : Aut(R) est uniquement ergodique.

Références

[1] Omer Angel, Alexander S. Kechris et Russell Lyons: *Random orderings and unique ergodicity of automorphism groups*. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 16(10) :2059–2095, 2014, ISSN 1435-9855,1435-9863. https://doi.org/10.4171/JEMS/483.

[2] A. S. Kechris, V. G. Pestov et S. Todorcevic: *Fraïssé limits, Ramsey theory, and topological dynamics of automorphism groups*. Geom. Funct. Anal., 15(1) :106–189, 2005, ISSN 1016-443X,1420-8970. https://doi.org/10.1007/s00039-005-0503-1.

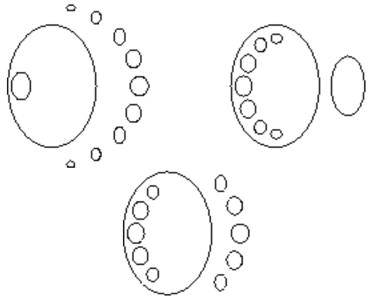
[3] Jaroslav Nešetřil: *Ramsey theory*. Dans *Handbook of combinatorics, Vol. 1, 2*, pages 1331–1403. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 1995, ISBN 0-444-88002-X.

[4] Vladimir Pestov: *Dynamics of infinite-dimensional groups*, tome 40 de *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. The Ramsey-Dvoretzky-Milman phenomenon, Revised edition of *Dynamics of infinite-dimensional groups and Ramsey-type phenomena* [Inst. Mat. Pura. Apl. (IMPA), Rio de Janeiro, 2005 ; MR2164572].

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 2 : Introduction à la topologie des variétés algébriques réelles - 32h de CM et 8h de TD**



Descriptif

Nous nous intéresserons dans ce cours aux objets géométriques définis par des polynômes à coefficients réels. Nous décrirons tout d'abord la premiére partie du 16-ième problème de Hilbert qui pose le problème de classification à isotopie près des courbes algébriques réelles dans le plan projectif réel à degré fixé ainsi que la classification des surfaces algébriques réelles dans l'espace projectif réel à homéomorphisme près (et toujours à degré fixé). Ces problèmes ne sont résolus que jusqu'au degré 7 pour les courbes et degré 5 pour les surfaces.

Nous donnerons des obstructions sur les groupes d'homologie de tels objets, en particulier nous verrons

- Inégalité de Harnack et de Smith-Thom,
- Inégalités de Petrovky et de Comessatti-Oleinik,
- Congruence de Rohklin.

Nous aurons besoin pour se faire de parler de structures de Hodge sur les variétés kählériennes, et nous ferons des rappels de topologie algébrique.

Dans un deuxième temps, nous indiquerons diverses méthodes de construction de courbes et surfaces algébriques réelles. Nous nous concentrerons plus précisément sur un sujet de recherche actuel : la méthode du patchwork. C'est une méthode de construction combinatoire découverte dans les années 70 par Oleg Viro. Nous ferons le lien entre la méthode du patchwork et la géométrie tropicale.

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 3 : Théorie algébrique des formes quadratiques - 32h de CM et 8h de TD**

Le but de ce cours est de traiter la théorie algébrique des formes quadratiques sur un corps de base arbitraire. Dans un premier temps, on travaille en caractéristique différente de 2. Après une première partie qui est consacrée a` des notions de base (théorie de Witt, théorie de Pfister,...), nous aborderons dans la seconde partie la théorie des corps de fonctions des quadriques projectives qui a joué un rôle fondamental dans la majorité des avancées qu'a connue la théorie des formes quadratiques durant les trois dernières décennies. Pour illustrer l'importance de la théorie des corps de fonctions, nous passerons en revue des problèmes parmi les plus importants sur les formes quadratiques : Le problème d'isotropie, le calcul de noyaux de Witt, le problème du *u*-invariant, le déploiement générique et la descente.

La dernière partie du cours viendra compléter la théorie des formes quadratiques et bilinéaires quand on se restreint a` un corps de caractéristique 2 en mettant l'accent sur les différents aspects qui changent par rapport a` la caractéristique différente de 2 et en traitant un outil essentiel pour la caractéristique 2 a` savoir la cohomologie de Kato-Milne [3] qui joue le rôle de la cohomologie Galoisienne modulo 2 en caractéristique différente de 2.

Pré-requis

Les notions de base dont on aura besoin pour ce cours sont celles traitées dans le cours d'algèbre approfondie donné en semestre 3.

Plan détaillé du cours

La théorie de Witt: Isométrie, diagonalisation, isotropie, hyperbolicité, simplification de Witt, de composition de Witt, anneau de Witt.

La théorie de Pfister : Théorème de Cassels-Pfister, théorèmes de représentation, formes de Pfister.

Corps de fonctions d'une quadrique: Définition et propriétés, le théorème de sous- forme de Cassels-Pfister, le "Hauptsatz" d'Arason-Pfister.

Bref aperçu sur la théorie des algèbres simples centrales, groupe de Brauer.

Algèbre de Clifford d'une forme quadratique : sa structure et ses propriétés.

Quelques invariants d'une forme quadratique et lien avec la cohomologie Galoisienne modulo 2.

- L'isotropie sur le corps de fonctions d'une quadrique: Théorème de Hoffmann, formes voisines, formes excellentes, isotropie en petite dimension.
- La théorie de déploiement générique de Knebusch et quelques résultats de classi fication par hauteur et degré.
- Quelques calculs de noyaux de Witt.
- Le théorème de réduction d'indice de Merkurjev et quelques unes de ses applications.
- La descente pour les formes quadratiques.
- Cohomologie de Kato-Milne et certaines de ses applications aux noyaux de Witt.

Bibliographie

[1] R. Elman, N. Karpenko, A. S. Merkurjev, *The Algebraic and geometric theory of quadratic forms,* American Mathematical Society Colloquium Publications, 56. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[2] B. Kahn, *Formes quadratiques sur un corps,* Cours Spe´cialise´s SMF 15, 2008.

[3] K. Kato, *Symmetric bilinear forms, quadratic forms and Milnor K-theory in characteristic two,* Invent. Math. 66 (1982), no. 3, 493–510.

[4] T. Y. Lam, *Introduction to Quadratic Forms over fields,* American Mathematical Society, 2005.

[5] J. Milnor, D. Husemoller, *Symmetric bilinear forms*, New York, Heidelberg: Springer 1973.

[6] W. Scharlau, *Quadratic and hermitian forms,* Springer, 1985.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement

- **S4 : Cours approfondi en analyse numérique et EDP : Ondes à la surface de l'eau - 32h de CM et 8h de TD :**

Il y a plus d'un siècle, John Scott Russell a observé une vague se déplaçant à vitesse constante à la surface d'un canal, en gardant sa forme initiale. Nous nous intéressons ici aux modèles mathématiques dispersifs pour les ondes à la surface de l'eau dans un canal peu profond et aux solutions particulières observées par JS Russel, les ondes progressives. Ces modèles pour ondes longues, dérivées des équations d'Euler, sont les modèles de type Korteweg-de Vries (KdV)
u_t + u_x + u_xxx + uu_x = 0,
ou la version régularisée de Benjamin, Bona et Mahony

$u_t + u_x - u_{txx} + uu_x = 0$.
L'équilibre subtil entre les eets dispersifs linéaires et les eets non linéaires
permet l'existence de ces ondes voyageuses. Le cours d'analyse appliquée est
organisé comme suit
• Nous discutons de la dérivation des modèles à partir des équations
d'Euler.
• Nous traitons le problème de Cauchy pour ces équations, en mettant
en évidence les outils dispersifs nécessaires pour analyser le problème.
• Nous nous concentrons sur l'existence et la stabilité des solutions
dites ondes progressives pour ces équations.
Les connaissances préalables requises sont des notions de base en analyse. Les
outils d'analyse fonctionnelle à utiliser seront introduits au fur et à mesure
du cours.

Bibliographie
[1] J. L. Bona, M. Chen, and J.-C. Saut, Boussinesq equations and other systems for
small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media I: Derivation and the linear
theory, J. Nonlinear Sci., 12 (2002), pp. 283–318.
[2] A. de Bouard, J.M. Ghidaglia, J. C. Saut Histoires d'eau, histoires d'ondes, Images
des mathématiques, 95, (1995), 23-30.
[3] F. Linares, G. Ponce, Introduction to nonlinear dispersive equations, Universitext
book series, Springer, 2009.

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi en probabilités et statistiques : Introduction aux processus déterminantaux - 32h de CM et 8h de TD**

Programme
Il sera question dans ce cours de processus ponctuels déterminantaux, souvent appelés DPP. Il s'agit de configurations aléatoires de points dont la loi peut être décrite à l'aide d'une fonction de deux variables (qui est le noyau d'un opérateur), ce qui permet d'en faire une étude fine.

Initialement considérés pour modéliser des fermions en mécanique quantique, les processus ponctuels déterminantaux ont été fortement popularisés ces vingt dernières années en raison de leur apparition assez surprenante dans divers champs des mathématiques et de la physique. Pour citer quelques exemples [2, 3], nous évoquerons - de manière plus ou moins approfondie selon les cas - les modèles aléatoires suivants : valeurs propres de matrices aléatoires, diffusions conditionnées à ne pas s’intersecter, zéros de fonctions analytiques aléatoires, gaz de Coulomb, pavages aléatoires, plus grande sous-suite croissante d’une permutation aléatoire et problème d’Ulam, représentations irréductibles du groupe symétrique sous la mesure de Plancherel, arbres couvrants uniformes d’un graphe.

Plus impressionnant encore, certains processus ponctuels déterminantaux (noyau sinus, noyau de Airy/loi de Tracy-Widom, pour citer les plus connus), apparaissent systématiquement comme objets limites dans l’étude locale de nombreux systèmes de particules aléatoires : ce sont les fameux phénomènes d’universalité en matrices aléatoires, qui en fait dépassent largement le cadre des seuls modèles matriciels [1].

Autre caractéristique très intéressante, les DPP ont la particularité de présenter de la répulsion entre les points: contrairement à des points i.i.d. qui peuvent s'accumuler au même endroit de l'espace, les nuages de points obtenus par DPP remplissent l'espace qui leur est alloué en s'écartant les uns des autres. Ces phénomènes de répulsion peuvent être exploités dans les applications, notamment en machine learning, dans les moteurs de recherche pour générer des réponses variées (et c'est grâce à eux que lorsque vous cherchez jaguar dans Google image, vous avez des félins ET des voitures), ou encore en analyse numérique pour accélérer des méthodes d'intégration numérique.

Le but de ce cours est de présenter une introduction assez complète des DPP en abordant à la fois des généralités théoriques, l’étude d’exemples concrets en lien avec des domaines assez divers des mathématiques et des exemples d'applications qui exploitent les propriétés fascinantes de ces configurations aléatoires.

Bibliographie

[1] P. Deift, Universality for mathematical and physical systems, International Congress of Mathematicians. Vol. I, 125–152, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[2] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres and B. Virág, Determinantal processes and independence, Probab. Surv. 3 (2006), 206–229.

[3] K. Johansson, Random matrices and determinantal processes, Mathematical statistical physics, 1–55, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.