MASTER 2 Sciences, Technologies, Santé

Mention Mathématiques

Parcours Recherche

En co-accréditation avec l'Université d'Artois et

avec l'Université Polytechnique Hauts-de-France

Année universitaire 2021 – 2022

Laboratoire Paul Painlevé - Université de Lille	(CNRS UMR 8524)
Laboratoire de Mathématiques de Lens - Université d'Artois	(UR 2462)
Laboratoire de Mathématiques LAMAV - UPHF	(EA 4015)
Laboratoire de Mathématiques pour l'Ingénieur - UPHF	

https://sciences-technologies.univ-lille.fr/les-departements-de-formation/mathematiques/

RESPONSABLE LILLE

Mylène MAIDA
mylene.maida@univ-lille.fr
Université de Lille
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Mathématiques
59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

SECRETARIAT

Aurore SMETS
math-masters2@univ-lille.fr
Tel. 03.20.43.42.33

RESPONSABLE VALENCIENNES

Serge NICAISE
Université Polytechnique Hauts-de-France
LAMAV - ISTV2
Le Mont Houy
59313 VALENCIENNES Cedex 9

SECRETARIAT

Nabila DAIFI
nabila.daifi@uphf.fr
Tel. 03.27.51.19.01

RESPONSABLE LENS-ARTOIS

Martintxo SARALEGI-ARANGUREN
saralegi@euler.univ-artois.fr
Tel. 03.21.79.17.20
Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Rue J. Souvraz, SP 18
F-62307 LENS CEDEX

OBJECTIFS

Le **Master Mathématiques** offre une formation approfondie en mathématiques et fourni un bagage solide et de haut niveau en mathématiques. Le parcours **Recherche** permet l'acquisition de connaissances approfondies dans des thématiques de recherche contemporaines en mathématiques. Les choix des cours proposés permettent aux étudiants de bénéficier d'un premier contact avec des problématiques de recherche en mathématiques, allant des mathématiques pures jusqu'aux mathématiques appliquées.

La formation est centrée sur les cinq domaines des mathématiques pures et appliquées représentés dans les laboratoires :

- Analyse
- Analyse numérique et équations aux dérivées partielles
- Arithmétique et géométrie algébrique
- Géométrie et topologie
- Probabilités et statistiques

DEBOUCHES

Le parcours **Recherche** s'inscrit principalement dans le monde de la recherche et de l'enseignement. Il prépare aux fonctions d'enseignant et de chercheur. Par sa poursuite en doctorat, le Master permet d'envisager une carrière d'enseignant-chercheur en Mathématiques dans l'enseignement supérieur, ou de chercheur dans un laboratoire de recherche public (CNRS, INRIA, etc) ou privé et, plus généralement, dans des sociétés de services ayant besoin de mathématiciens.

Pour préparer une thèse de doctorat :

Un nombre limité de contrats doctoraux de 3 ans peuvent être établis. Leurs sources de financement sont : Allocations de recherche du Ministère, bourse du LABEX CEMPI, bourses CNRS, bourses de la Région, bourses CIFRE, bourses financées par des programmes institutionnels. Une rémunération complémentaire pour service d'enseignement peut également être envisagée.

Candidature : Les règles du concours d'attribution des allocations de thèse et le dossier à télécharger se trouvent sur le site de l'Ecole Doctorale SPI (http://edspi.univ-lille1.fr/). L'étudiant choisit un sujet de thèse (la liste se trouvant sur les sites web des laboratoires), se met en contact avec un directeur de thèse et lui adresse un dossier complet (cf calendrier en ligne).

BOURSES

Des bourses d'excellence de Master 2, financées par le LABEX CEMPI (http://math.univ-lille1.fr/~cempi/), peuvent être attribuées aux candidats les plus méritants. La procédure de candidature est expliquée sur le site de la formation : https://sciences-technologies.univ-lille.fr/mathematiques/formation/master-mention-mathematiques/m2-recherche

Date limite de dépôt des demandes de bourse d'excellence : 17 février2021

ADMISSIONS

PHASE 1 : CANDIDATURE (PRÉ-REQUIS ET PUBLIC CONCERNÉ)

S'agissant des étudiants ayant validé le master 1 de la mention Mathématiques de l'Université de Lille, l'accès au master 2 Mathématiques parcours Recherche est de droit ; il vous appartiendra donc de procéder directement à votre inscription administrative (cf phase 2).

S'agissant des étudiants ayant validé un autre master 1 d'un parcours national de master dans une mention compatible (Mathématiques fondamentales ou appliquées) ou un diplôme à l'étranger (hors procédure Campusfrance), l'accès en master 2 Mathématiques parcours Recherche se fait par sélection sur dossier, suivi le cas échéant d'un entretien de motivation. **Toute candidature doit passer par la plateforme ecandidat :**

https://ecandidat.univ-lille.fr/

PHASE 2 : INSCRIPTION

Une fois que la décision d'acceptation dans la formation a été notifiée, l'**inscription administrative** se fait au début de l'année universitaire (le calendrier est en ligne sur le site de l'université de Lille : https://www.univ-lille.fr/etudes/candidater-sinscrire/) auprès des services administratifs de l'université.
Elle sera complétée, à la rentrée, par **l'inscription pédagogique** qui permet d'établir le contrat pédagogique de chaque étudiant et de l'inscrire aux examens correspondants (se rapprocher du secrétariat pédagogique).

ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT

SEMESTRE 3

BCC Maîtriser les concepts des mathématiques (Niveau approfondi 2) (Choix de 3 UE fondamentales parmi 7 dont au plus une UE de méthodes numériques)	Algèbre approfondie	9 ECTS
	Analyse approfondie	9 ECTS
	Géométrie approfondie	9 ECTS
	Introduction aux EDP non-linéaires	9 ECTS
	Probabilités approfondies	9 ECTS
	Méthodes numériques pour les EDP	9 ECTS
	Méthodes numériques pour les Probas-Stats	9 ECTS
BCC S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel	Séminaire d'étudiants en anglais	3 ECTS

SEMESTRE 4

BCC S'initier à la recherche dans le domaine des mathématiques (Choix de 2 UE parmi 7)	Cours approfondi de mathématiques pures 1	9 ECTS
	Cours approfondi de mathématiques pures 2	9 ECTS
	Cours approfondi de mathématiques pures 3	9 ECTS
	Cours approfondi en analyse numérique et EDP 1	9 ECTS
	Cours approfondi en analyse numérique et EDP 2	9 ECTS
	Cours approfondi en probabilités et statistiques 1	9 ECTS
	Cours approfondi en probabilités et statistiques 2	9 ECTS
BCC S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel	Mémoire de recherche (possibilité de faire un stage en plus du mémoire)	12 ECTS

PROGRAMME DES COURS

2021 - 2022

- **S3 : Algèbre approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

Le sujet principal de ce cours est l'algèbre commutative, c'est-à-dire la théorie des anneaux et ses applications. Les deux tiers du cours seront consacrés à l'étude des notions et structures fondamentales du domaine. Le tiers restant sera consacré à des thèmes d'approfondissement ou à des applications. Le plan ci-dessous fourni une liste de sujets d'approfondissement possibles. Ces approfondissements pourront être traités en cours ou faire l'objet d'exposés d'étudiants. Les choix seront faits en fonction des projets des étudiants. Il s'agira de faire la jonction avec les cours du second semestre ou d'apporter des compléments de connaissances.

- Notions fondamentales
  - Anneaux et idéaux
    – Définition de la structure et exemples (révisions et compléments), anneaux principaux et euclidiens, anneaux factoriels.
    – Anneaux noethériens. Le théorème de la base de Hilbert
    – Idéaux premiers et maximaux. Dimension de Krull d'un anneau
  - Modules sur les anneaux
    – Définition de la structure et exemples. Opérations sur les modules. Modules noethériens
    – Présentation des modules par générateurs et relations. Syzygies et résolutions
    – Classification des modules de type fini sur un anneau principal
  - Anneaux et modules de fractions, localisation
- Thèmes d'approfondissement
  - Bases de Gröbner et méthodes effectives dans les anneaux de polynômes. Algorithme de Buchberger. Applications au calcul des syzygies
  - Introduction à la géométrie algébrique. Nullstellensatz. Faisceaux et variétés algébriques. Etude des ´ courbes algébriques
  - Etude des anneaux d'entiers de corps de nombres. Structure d'anneau de Dedekind. Unités et groupes de classes d'idéaux dans les anneaux d'entiers de corps de nombres
  - Nombres p-adiques. Construction. Lemme de Hensel. Groupe des unités. Théorème d'Hasse-Minkowski et principe local-global.
  - . . .

Bibliographie

[1] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald. Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley publishing co., 1969.

[2] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald. Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley publishing co., 1969.

[3] D. Eisenbud. Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, 2004.

[4] W. Fulton. Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry. W.A. Benjamin inc., 1969.

[5] D. Perrin. Géométrie algébrique. Une introduction. Savoirs Actuels. InterEditions, Paris. CNRS Editions, Paris, 1995.

[6] P. Samuel. Théorie algébrique des nombres, Hermann, Paris, 1967.

[7] J.-P. Serre. Cours d'arithmétique. Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

Evaluation
Le contrôle continu (CC) comportera un examen partiel de 2h et un exposé. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1, (Ex1+CC)/2).

- **S3 : Analyse approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Partie I (24h CM - 8h TD)

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :

- Convergence faible (et préfaible) dans le cadre des espaces de Banach, exemple des mesures complexes comme dual de C(K) (théorème de Riesz).
- Réflexivité, étude d'exemples classiques (espaces de suites, espaces Lp).
- Espaces de Fréchet, exemples de C∞(Ω), Hol(Ω), S(Rn), distributions, etc.
- Théorème de Paley-Wiener (Fourier complexe).
- Equations différentielles complexes et fonctions spéciales.
- Fonctions harmoniques.
- Espaces de Hilbert de fonctions analytiques sur un ouvert de C ou Cn, noyau reproduisant, exemples (Hardy, Bergman, Dirichlet).
- Opérateurs sur les espaces de Hilbert, opérateurs à noyau, compacts.
- Valeurs propres et singulières des opérateurs.
- Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.

Bibliographie
[1] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications, Masson.
[2] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer.
[3] J. Cerda, Linear Functional Analysis, gsm 116, AMS.
[4] F. Hirsch, G. Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle, Dunod.
[5] W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw Hill.
[6] D. Li, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, Ellipses.

Evaluation
Le contrôle continu (CC) comportera trois devoirs à la maison. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1, (Ex1+CC)/2).

- **S3 : Géométrie approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Partie I (24h CM - 8h TD)

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :

- Sous-variétés de Rn.
- Variétés abstraites.
- Constructions de variétés (affines, projectives, actions de groupes).
- Formes différentielles sur les variétés. Différentiation. Lemme de Poincaré.
- Intégration des formes différentielles. Formule de Stokes.
- Lemme de Sard, degré.
- Fibrés vectoriels. Classification des fibrés sur S1 et S2.
- Cohomologie de de Rham.

- Indices des champs de vecteurs et nombre d'Euler. Formule de Hopf.
- Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.

Bibliographie

[1] Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, EDP Sciences 2010.
[2] Godbillon, Eléments de topologie algébrique, Hermann 1998.
[3] Chavel, Riemannian Geometry : a modern introduction, Cambridge University Press 2006.
[4] Bott-Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer 1982.
[5] Hirsch, Differential Topology, Springer, 1976.

Evaluation

Le contrôle continu (CC) sera un examen partiel de 2h. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S3 : Introduction aux EDP non-linéaires – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Espaces de Sobolev
  Inégalité de Poincaré. Théorèmes de trace et de recollement. Formule de Green. Injections de Sobolev. Théorème de Rellich.
- Etude théorique de problèmes elliptiques
  Théorème de Lax-Milgram, formulation variationnelle. Principe du maximum, régularité. Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur elliptique. Méthode de sur et sous solutions.
- Problèmes paraboliques
  Existence et unicité. Principe du maximum, régularité. Méthode de sur et sous solutions.
- Théorèmes de point fixe Thormes de Banach, Brouwer et Schauder.
  Applications aux EDP non linéaires.
- Equations de transport Solutions classiques, solutions faibles.
  Méthode des caractéristiques, solutions entropiques. Résolution du problème de Riemann. Application à l'équation de Burgers et au trafic routier.

Bibliographie

[1] R. Adams, J. Fournier, Sobolev spaces (second edition), Elsevier.
[2] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V. 19.
[3] M. E. Taylor, Partial Differential Equations I, II, III Applied Mathematical Sciences.
[4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Application, Dunod Université.
[5] D. Serre, Systèmes de lois de conservation, tomes i et ii, Cassini, 1996.
[6] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer.

Evaluation

Le contrôle continu (CC) sera un examen partiel de 2h. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S3 : Probabilités approfondies – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Processus stochastiques : théorème de Kolmogorov (admis), processus gaussiens, mouvement brownien, modification continue, propriétés des trajectoires.
- Introduction aux équations différentielles stochastiques : intégrale de Wiener, exemples simples d'EDS.
- Processus de Markov à sauts en temps continu : générateur, liens avec les chaînes de Markov, processus de Poisson, files d'attente.
- Inégalités de concentration : inégalités de Chernoff, Hoeffding, Bernstein, etc, applications.
- Grandes déviations : théorème de Cramer, principe de grandes déviations.

Bibliographie

[1] Bouleau, Processus Stochastiques et applications, Hermann.
[2] Claude Dellacherie, Pierre-Andre Meyer. Probabilités et potentiels. Hermann, 1975.
[3] D. Revuz et M. Yor, Continuous Martingales and Brownian motion, Springer.
[4] Karatzas et Shreeve, Brownian motion and stochastic calculus, Springer.
[5] I Florescu et C. Tudor, Handbook of Probability, Wiley.

Evaluation

Le contrôle continu (CC) sera un examen partiel de 2h. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S3 : Méthodes numériques pour les EDP - 20h de CM et 46h de TD**

Programme

Cette unité pédagogique est constituée de deux modules : Outils informatiques en en calcul scientifique et Finite elements methods.

➢ Partie I (36h TD) : Outils informatiques en calcul scientifique

- Prise en main de python : rappels et compléments.
- Résolution de systèmes linéaires : méthodes directes, méthodes itératives.
- Méthodes de calcul de valeurs propres-vecteurs propres.
- Résolution d'équations non linéaires.
- Résolution approchée de l'équation de la chaleur.
- Différences finies pour l'approximation d'une équation elliptique 1D.
- Différences finies pour la résolution approchée de l'équation de la chaleur.

➢ Partie II (20h CM – 10h TD) : Finite elements methods
The aim of this course is to acquire the theoretical and practical backgrounds for the numerical approximation of (systems of) PDEs of elliptic, or parabolic types using Finite Element (FE) Methods. Content :

- Variational formulation of elliptic PDEs: strong/weak solutions; derivation of a variational formulation; well-posedness (coercive case; Lax-Milgram); equivalence with the strong form; treatment of different types of data (variable coefficients, homogeneous/non-homogeneous cases) and boundary conditions (pure Dirichlet, pure Neumann, mixed-type, Robin-type).
- Variational approximation of elliptic problems: general idea, vocabulary; well-posedness (matricial viewpoint); Céa's lemma (conforming case); general convergence theorem.

- P1/P2 FE in 1D : definition of a FE ; definition of the reduction, reconstruction, and interpolation operators; shape functions; stiffness and mass matrices computation; quadrature formulas (Newton-Cotes, Gauss-Legendre); imposition of boundary conditions; convergence theorems.
- P1/P2 /Q1 FE in 2/3D : notion of admissible mesh; barycentric coordinates; stiffness and mass matrices computation; assembly procedure; cubature formulas; convergence theorems
- Implementation of a 2D P1 FE method in C++ : use of Gmsh (mesher), and of various libraries (improved standard, linear algebra, visualization...); generic and object-oriented programming.
- Approximation of parabolic problems: diagonalization of the heat operator; Euler/FE time/space schemes (explicit and implicit versions); convergence theorems; CFL condition; mass lumping; implementation

Bibliographie

[1] G. Golub et C. Van loan : Matrix Computations, Johns Hopkins University Press
[2] G. Allaire et S.M. Kaber : Algèbre Linéaire Numérique. Cours et exercices, Paris Ellipses
[3] J.P. Demailly : Analyse Numérique et Equations Différentielles, EDP Sciences, Eyrolles
[4] P. Lascaux et R. Théodor : Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur, Dunod
[5] J.-B. Hiriart-Urruty : Optimisation et Analyse Convexe (résumé de cours, exercices et problèmes corrigés), editions EDP Sciences
[6] L. Di Menza : Analyse Numérique des Equations aux dérivées partielles, Cassini
[7] B. Lucquin : Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ellipses
[8] E. Hubert et J. Hubbard : Calcul Scientifique, Vuibert
[9] J.-E. Rombaldi : Interpolation et Approximation (cours et Exercices Résolus), Vuibert
[1] A. Quarteroni, P. Gervasio, F. Saleri: Calcul Scientifique (cours et exercices corrigés), Springer
[10] W. Gautschi: Numerical Analysis, BirkhäuserT. Gordon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul Scientifique, ISTE Editions
[11] G. Allaire : Numerical Analysis and Optimisation, Oxford University Press

Evaluation

Pour la partie I, le contrôle continu (CC) sera constitué d'évaluations de projets tout au long du semestre. L'examen final (Ex1) durera 3h et la note de l'EC sera (Ex1+CC)/2.
Pour la partie II, la note de CC comportera une note de TP, une note de DM et une note d'exposé d'articles. L'examen final (Ex1) durera 3h et la note de l'EC sera (Ex1+CC)/2.
La note de l'UE sera la moyenne des deux notes.

- **S3 : Méthodes numériques pour les Probas-Stats - 20h de CM et 56h de TD**

Programme

Cette unité pédagogique est constituée de deux modules : Outils informatiques en Proba-Stats et Théorie de l'apprentissage.

- ➢ Partie I (36h TD) : Outils informatiques en Proba-Stats
- Estimation paramétrique, intervalle de confiance.
- Méthodes de Monte-Carlo.
- Fonction de répartition empirique.
- Processus de Poisson.
- Chaînes de Markov.

➢ Partie II (20h CM – 20h TD) : Théorie de l’apprentissage
L'objectif de ce cours est de savoir calculer des bornes sur les risques théoriques des méthodes d’apprentissage.

- Rappel sur les inégalités de concentration
- Risque théorique et empirique en apprentissage
- Nombres de croissance et dimension de Vapnik-Chervonenkis
- Complexité de Rademacher
- Nombres de couverture et dimension de pulvérisation

Bibliographie
[1] Processus de Markov et Applications. Algorithmes, réseaux, génome et finance. Etienne Pardoux.
[2] Exercice de probabilités : Licence - Master - Ecole d'ingénieurs. Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre.
[3] Statistique mathématique en action. Vincent Rivoirard et Gilles Stoltz.

Evaluation
La partie I sera évaluée par un examen final de 3h. La partie II également. La note de l’UE est la moyenne des deux notes.

- **S3 : Séminaire d’étudiants en anglais – 24h de TD**

Programme
Le séminaire d'étudiants comprend des séances en Anglais basées sur la lecture de livres de mathématiques ou d'articles de recherche. Les étudiants sont amenés à faire des exposés en Anglais.
Evaluation
L’évaluation sera basée sur un exposé et un mémoire en anglais rendu pendant le semestre.

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 1 : Géométrie des espaces symétriques, rigidité - 32h de CM et 8h de TD**

Programme
Le cours porte sur la géométrie riemannienne des espaces symétriques. Les espaces symétriques sont les variétés riemanniennes pour lesquelles les symétries centrales sont des isométries. On s’intéressera surtout aux espaces symétriques non-compacts. On décrira leur courbure, leurs géodésiques et leurs sous-espaces plats. Ces derniers induisent une structure d’immeuble de Tits au bord `a l’infini des espaces symétriques. Cette structure joue un role essentiel dans les théorèmes de rigidité de Mostow, Margulis et autres. En fonction du temps on abordera quelques-uns de ces phénomènes de rigidité.

Bibliographie
[1] A. Borel, Semisimple groups and Riemannian symmetric spaces, Texts and Readings in Mathematics, vol. 16, Hindustan Book Agency, 1998.

[2] M. Bridson and A. Haefliger, Metric spaces of nonpositive curvature, Grund. Math. Wiss., vol. 319, Springer, 1999.

[3] K. S. Brown, Buildings, Springer 1989.

[4] Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités, Edité par L. Bessières, A. Parreau et B. Rémy, Séminaires et congrès 18, SMF 2009.

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement. La note de l'UE sera donnée par la formule : max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 2 : Méthodes mathématiques de l'information quantique- 32h de CM et 8h de TD**

Programme
Un ordinateur exploitant subtilement les principes de base de la mécanique quantique pourra être spectaculairement plus efficace qu'un ordinateur classique, comme l'ont démontré théoriquement Shor (1994) et Grover (1996), en proposant des algorithmes quantiques capables de factoriser un très grand nombre premier très rapidement ou de repérer très rapidement une donnée dans une très grande liste non-organisée. Ces résultats ont donné lieu à une nouvelle science, à la jonction de l'informatique, de la théorie de l'information et de la mécanique quantique : l'information quantique, qui englobe notamment la cryptographie quantique et le calcul quantique. Ses promesses, non totalement tenues pour l'instant, ont également attiré les investisseurs privés comme publics mondialement, vers la technologie quantique. Le but de ce cours est de fournir une introduction à quelques aspects de l'information quantique, en présentant notamment ses outils mathématiques. De ce point de vue, il s'agira d'un cours d'analyse, combinant analyse spectrale, analyse fonctionnelle, théorie des opérateurs et des algèbres d'opérateurs, ainsi que les probabilités. Le cours sera illustré avec des programmes en Qiskit, le "open source" de IBM qui permet de simuler des programmes quantiques. Les connaissances acquises en Licence et Master 1 dans ces disciplines suffiront comme prérequis et le cours s'inscrit aussi bien dans un parcours orienté vers les mathématiques pures que appliquées. Un polycopié sera mis à disposition.
Programme prévisionnel :

- Eléments de la mécanique quantique ´ (8h CM+2h TD)
  - Espace des états = espace de Hilbert
  - Observables = opérateurs auto-adjoints
  - Observables (in-)compatibles = opérateurs (ne) commutant (pas)
  - Principe d'incertitude = transforée de Fourier
  - Etats = opérateurs à trace positifs
  - Mélange statistique, états pures et mixtes = combinaison convexe, points extrémaux Systèmes composites = produits tensoriels
  - Dynamique = flot unitaire = équation de Schrödinger
  - Symétries = représentation unitaire de groupe
  - Mesure physique = projection
- Intrication (8h CM+2h TD)
  - Etats séparables et intriqués
  - Le théorème "no cloning" (Zurek, Wootters, Dieks 1982)
  - La décomposition de Schmidt
  - La purification = la représentation GNS
  - Mesures d'intrication bi-partites, entropies de von Neumann
- Portes quantiques et algorithmes quantiques (10h CM + 2hTD)
  - Portes quantiques binaires, générales, universelles
  - Circuits quantiques
  - Cryptographie quantique : le protocole BB84
  - Algorithmes quantiques : Deutsch, Schor, Grover

- Opérations quantiques (6h CM+2hTD)
    - Application complètement positive sur un espace de Hilbert
    - Equation maîtresse quantique, générateur de Lindblad
    - Décohérence et approche à équilibre

Bibliographie

[1] [CTLD97] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Laloe, and Franck Diu. Mécanique Quantique I. Hermann, Paris, 1997.
[2] [GMS16] Ved Prakash Gupta, Prabha Mandayam, V.S. Sunder. The Functional Analysis of Quantum Information Theory. Springer, LNP, 2015, https://arxiv.org/pdf/1410.7188.pdf
[3] [Ha18] Masahito Hayashi. Quantum information theory : mathematical foundation Springer, 2017
[4] [NiCh00] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010.
[5] [RS75] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975
[6] [RS78] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
[7] [RS80] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. I. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second edition, 1980. Functional analysis.
[8] [S19] Wolfgang Scherer Mathematics of quantum computing. Springer, 2019

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement. La note de l'UE sera donnée par la formule : max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 3 : Formes automorphes sur GL (1) et GL (2) - 32h de CM et 8h de TD**

Programme

Nous introduirons d'abord l'espace des formes modulaires classiques pour GL (2) et les opérateurs de Hecke, en donnant des exemples explicites, tels que les séries d'Eisenstein, les séries thêta et la fonction τ de Ramanujan. Cette partie de caractère analytique ne nécessite pas de prérequis particuliers. Nous verrons ensuite comment les nombres p-adiques (introduits au semestre 3) et les adèles permettent de comprendre les extensions abéliennes d'un corps de nombres (i.e. les représentations abéliennes de son groupe de Galois absolu) en termes de caractères du groupe de classes d'idèles (appelés aussi caractères de Hecke) introduisant ainsi la notion de forme automorphe pour GL (1). Enfin nous présenterons la théorie des formes automorphe pour GL(2), porte d'entrée dans un vaste domaine de recherche, connu sous le nom de Programme de Langlands, auquel ont contribué de nombreux très grands mathématiciens.

Bibliographie

[1] D. Bump, Automorphic forms and representations, vol. 55 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
[2] F. Diamond and J. Shurman, A First Course in Modular Forms, Graduate Studies in Mathematics, 2005.

[3] blitz, p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions, vol. 58 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 1984.
[4] Neukirch, Class field theory, vol. 280 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 1986.
[5] A. Weil, Basic number theory, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the second (1973) edition.

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement. La note de l'UE sera donnée par la formule : max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S4 : Cours approfondi en analyse numérique et EDP 1 : Une introduction mathématique et numérique à la théorie cinétique - 32h de CM et 8h de TD**

Programme
La théorie cinétique vise à décrire des systèmes de particules en interaction comme des gaz, des plasmas ou même des anneaux planétaires, de manière statistique, en utilisant des équations aux dérivées partielles ou des équations intégro-différentielles. C'est l'un des piliers de la physique et des mathématiques modernes, et un domaine de recherche jeune et très actif. Le but principal de ce cours est d'introduire les motivations principales, les applications, les grandes méthodes, et certains problèmes ouverts en théorie cinétique. Nous nous focaliserons d'un côté sur les méthodes mathématiques et les outils nécessaires pour l'étude du problème de Cauchy et du comportement qualitatif d'équations cinétiques. D'un autre côté, nous introduirons les méthodes numériques pour la résolution de telles équations, à travers des implémentations pratiques en Python lors de TP.

- Cours (32h).
  - Introduction (motivations, applications, modèles) ;
  - Équations de transport (méthode des caractéristiques, lemmes de moyennes, de dispersion) ;
  - Équations de type Vlasov (établissement de l'équation de champ moyen de Vlasov, introduction formelle aux modèles de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell pour les plasmas, stabilité des solutions faibles de Vlasov-Poisson) ;
  - Équations de type Boltzmann (caractère bien posé de l'équation de Boltzmann linéaire, forme faible et invariants de l'opérateur de Boltzmann, Théorème H, limites hydrodynamiques).
- Lecture d'article. Étude d'un sujet additionnel (conditions aux limites, hypocoercivité, amortissement Landau linéaire, schémas numériques préservant les comportements asymptotiques, limites de diffusion, schéma « particle-in-cell », etc.) via la lecture d'un article scientifique et d'une présentation orale.
- Travaux pratiques (8h). Implémentation pratique de méthode numériques représentant l'état de l'art pour des modèles cinétiques classiques :
  - Méthode semi-lagrangienne pour l'équation de Vlasov ;
  - Méthode spectrale rapide pour l'équation de Boltzmann homogène

Bibliographie
[1] C. Villani, A Review of Mathematical Topics in Collisional Kinetic Theory, in Handbook of mathematical fluid dynamics, pp. 71–305, 2002.
[2] L. Saint-Raymond, Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation, Springer Science & Business Media, 2009.

[3] G. Dimarco, L. Pareschi, Numerical methods for kinetic equations, Acta Numerica, 23, 369-520, 2014.
[4] R. T. Glassey, The Cauchy problem in kinetic theory, SIAM, 1996.
[5] F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti. Kinetic equations and asymptotic theory, 2000.

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement. La note de l'UE sera donnée par la formule : max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S4 : Cours approfondi en analyse numérique et EDP 2 : Condensats de Bose-Einstein : théorie et simulation numérique - 32h de CM et 8h de TD**

Programme
On propose dans ce cours une introduction à la modélisation et à la simulation numérique des condensats de Bose-Einstein qui traduisent le comportement superfluide d'origine quantique d'une population de bosons en interaction à très basse température dans un potentiel électrique confinant.
D'un point de vue théorique, on introduit les notions de base permettant d'arriver à la formulation de l'équation de Gross-Pitaevskii. On discute en fonction de la nature des interactions des propriétés des points critiques de la fonctionnelle d'énergie associée. On fait en particulier une étude qualitative théorique détaillée du minimiseur de l'énergie. On présente également quelques aspects de la dynamique de l'équation de Gross-Pitaevsksii. S'il reste du temps, on pourra parler également de la mise en rotation des condensats et de la minimisation de l'énergie dans le repère tournant (en 2D).
D'un point de vue numérique, on introduit diverses méthodes de discrétisation afin d'obtenir des solutions approchées des points critiques de l'énergie de l'équation de Gross-Pitaevskii (méthode de tir, méthode du « temps imaginaire »). On présente également des méthodes de résolution numérique en temps de l'équation de Gross-Pitaevskii (méthodes de décomposition). Enfin, s'il reste du temps, on dira quelques mots des méthodes existantes pour le calcul des condensats en rotation (en 2D).

Bibliographie
[1] A. Aftalion, Vortices in Bose-Einstein condensates, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol 67 (2006), Springer.
[2] E. Hairer, G. Wanner and C. Lubich, Geometric Numerical Integration, Springer Series in Computational Mathematics, Vol 31 (2006), Springer.

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement. La note de l'UE sera donnée par la formule : max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S4 : Cours approfondi en probabilités et statistiques 1 : Calcul stochastique et modèles de diffusions - 32h de CM et 8h de TD**

Programme
Dans de nombreuses applications qui concernent une multitude de phénomènes dynamiques, comme par exemple les évolutions des prix d'actifs financiers ou bien les croissances démographiques de populations, les modélisations deviennent plus réalistes lorsqu'on introduit de l'aléa dans les coefficients des équations différentielles associées ; celles-ci sont alors appelées équations différentielles stochastiques (EDS) et leurs solutions portent le nom de processus de diffusions. Les EDS sont des outils vraiment fondamentaux

et d'un usage très courant en probabilités et en mathématiques financières, ils interviennent aussi de façons cruciales dans plusieurs domaines de la statistique, ainsi que dans bien d'autres sciences comme la physique, la chimie ou la biologie.
L'intégrale d'Itô, qui générale l'intégrale de Wiener à des intégrands aléatoires, et la formule d'Itô, qui dans ce cadre correspond au théorème fondamental du calcul différentiel, permettent de formaliser rigoureusement les EDS classiques, et d'établir sous certaines conditions l'existence et l'unicité de leur solutions.
Ce cours concernera surtout les thèmes suivants :

- Quelques résultats utiles sur les martingales en temps continu.
- Construction et propriétés de base de l'intégrale d'Itô.
- Liens essentiels entre martingales et intégrales d'Itô.
- Processus d'Itô, formule d'Itô et ses généralisations classiques.
- Transformation de Girsanov.
- Résolution d'équations différentielles stochastiques.
- Quelques liens fondamentaux avec les mathématiques financières : le modèle de Black et Scholes

Bibliographie

[1] N. Bouleau, Probabilités de l'ingénieur, Hermann, 1986.
[2] N. Bouleau, Processus stochastiques et applications, Hermann, 1988.
[3] F. Comets et T. Meyre, Calcul stochastique et modèles de diffusions, Dunod, 2020.
[4] R. Dudley, Real analysis and probability, Cambridge University Press, 2002.
[5] I. Karatzas et S.E. Shreve, Brownian motion and stochastic calculus, Springer-Verlag, 1988.
[6] L. Koralov et Y.G. Sinai, Theory of probability and random processes, Springer,2007.
[7] D. Lamberton et B. Lapeyre, Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance, Ellipse 2012.
[8] J.-F. Le Gall, Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique, Springer, 2012.
[9] B. Oksendal , Stochastic differential equations, Springer-Verlag, 2003.
[10] D. Revuz et M. York, Continuous martingales and Brownian motion, Springer-Verlag, 1999.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement. La note de l'UE sera donnée par la formule : max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S4 : Cours approfondi en probabilités et statistiques 2 : Concentration de la mesure et applications - 32h de CM et 8h de TD**

Programme

Ce cours présente quelques approches permettant d'obtenir ces outils puissants que sont les inégalités de concentration. Dans un second temps, des applications sont proposées dans quelques domaines sélectionnés : compressed sensing, réduction de dimension, statistical learning.

- Inégalités de concentration : comment les obtenir ? Les approches et résultats ([3, 4, 5, 6])
  1) Markov (exponentiel) et somme de variables aléatoires indépendantes : inégalités de Hoeffding, Bennett, Bernstein

2) Méthodes de martingales : inégalités d’Azuma, Mc Diarmid
3) Isopérimétrie gaussienne : inégalité de Borell-Sudakov-Tsirelson
4) Méthodes d’entropie : argument de Herbst, tensorisation, mesure produit
5) Méthodes de transport : inégalité de distance convexe, inégalité de transport gaussien.

- Applications sélectionnées ([1, 2, 5, 7]) :
1) Réduction de dimension : lemme de Johnson-Lindenstrauss
2) Estimation de covariance et complétion de matrices
3) Récupération d’un signal “sparse”
4) Complexité de Rademacher

Bibliographie

[1] Amini M-R, Apprentissage machine, Eyrolles, 2014.
[2] Bartlett p., Lectures notes, https://people.eecs.berkeley.edu/˜bartlett/courses/ 281b-sp08/
[3] Boucheron S., Lugosi G., Massart P., Concentration inequalities, Oxford, 2013.
[4] Ledoux M. The concentration of measure phenomenon, AMS, 2001.
[5] Tropp J.A., An introduction to matrix concentration inequlities, https://arxiv.org/pdf/1501.01571.pdf
[6] Vershynin R., High-dimensional probability, 2018. https://www.math.uci.edu/˜rvershyn/
[7] Vershynin R., Four lectures on probabilistic methods for data science, https://arxiv.org/abs/1612.06661.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement. La note de l’UE sera donnée par la formule : max(Ex1,(Ex1+CC)/2).