MASTER 2 Sciences, Technologies, Santé

Mention Mathématiques

Parcours Recherche

En co-accréditation avec l'Université d'Artois et

avec l'Université Polytechnique Hauts-de-France

Année universitaire 2023 – 2024

Laboratoire Paul Painlevé - Université de Lille (CNRS UMR 8524)
Laboratoire de Mathématiques de Lens - Université d'Artois (UR 2462)
Laboratoire de Matériaux Céramiques et de Mathématiques CERAMATHS – Département DMTHS - UPHF

https://sciences-technologies.univ-lille.fr/les-departements-de-formation/mathematiques/

RESPONSABLE LILLE	Mylène MAIDA mylene.maida@univ-lille.fr Université de Lille Faculté des Sciences et Technologies Département de Mathématiques 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX
SECRETARIAT	Céline SAADE math-masters2@univ-lille.fr Tel. 03.20.43.42.33

RESPONSABLE VALENCIENNES	Serge NICAISE Université Polytechnique Hauts-de-France CERAMATHS/DMATHS - Abel de Pujol 2 Le Mont Houy 59313 VALENCIENNES Cedex 9
SECRETARIAT	Fatiha Meziane fatiha.meziane@uphf.fr Tel. 03.27.51.19.01

RESPONSABLE LENS-ARTOIS	Martintxo SARALEGI-ARANGUREN saralegi@euler.univ-artois.fr Tel. 03.21.79.17.20 Université d'Artois Faculté des Sciences Jean Perrin Rue J. Souvraz, SP 18 F-62307 LENS CEDEX

OBJECTIFS

Le **Master Mathématiques** offre une formation approfondie en mathématiques et fournit un bagage solide et de haut niveau en mathématiques. Le parcours **Recherche** permet l'acquisition de connaissances approfondies dans des thématiques de recherche contemporaines en mathématiques. Les choix des cours proposés permettent aux étudiants de bénéficier d'un premier contact avec des problématiques de recherche en mathématiques, allant des mathématiques pures jusqu'aux mathématiques appliquées.

La formation est centrée sur les cinq domaines des mathématiques pures et appliquées représentés dans les laboratoires :

- Analyse
- Analyse numérique et équations aux dérivées partielles
- Arithmétique et géométrie algébrique
- Géométrie et topologie
- Probabilités et statistiques

Le parcours recherche fait partie du programme gradué "Information and Knowledge Society" (GP-IKS) : http://www.isite-ulne.fr/index.php/fr/programme-gradue-information-and-knowledge-society-etudiant/

DEBOUCHES

Le parcours **Recherche** s'inscrit principalement dans le monde de la recherche et de l'enseignement. Il prépare aux fonctions d'enseignant et de chercheur. Par sa poursuite en doctorat, le Master permet d'envisager une carrière d'enseignant-chercheur en Mathématiques dans l'enseignement supérieur, ou de chercheur dans un laboratoire de recherche public (CNRS, INRIA, etc) ou privé et, plus généralement, dans des sociétés de services ayant besoin de mathématiciens.

Pour préparer une thèse de doctorat :

Un nombre limité de contrats doctoraux de 3 ans peuvent être établis. Leurs sources de financement sont : Allocations de recherche du Ministère, bourse du LABEX CEMPI, bourses CNRS, bourses de la Région, bourses CIFRE, bourses financées par des programmes institutionnels. Une rémunération complémentaire pour service d'enseignement peut également être envisagée.

Candidature : Les règles du concours d'attribution des allocations de thèse et le dossier à télécharger se trouvent sur le site de l'Ecole Doctorale SPI-MADIS (https://edspi.univ-lille.fr/presentation/specialites-spi-madis). L'étudiant choisit un sujet de thèse (la liste se trouvant sur les sites web des laboratoires), se met en contact avec un directeur de thèse et lui adresse un dossier complet (cf calendrier en ligne).

BOURSES

Des bourses d'excellence de Master 2, financées par le LABEX CEMPI (http://math.univ-lille1.fr/~cempi/), peuvent être attribuées aux candidats les plus méritants. La procédure de candidature est expliquée sur le site de la formation : https://sciences-technologies.univ-lille.fr/mathematiques/formation/master-mention-mathematiques/m2-recherche

Date limite de dépôt des demandes de bourse d'excellence : 18 février

Vous pouvez également candidater aux bourses d'excellence proposées par le programme gradué GP-IKS. La procédure de candidature est précisée sur la page web du GP : http://www.isite-ulne.fr/index.php/fr/programme-gradue-information-and-knowledge-society-etudiant/

Il y a deux appels par an pour ces bourses, **en mars et en juin**.

ADMISSIONS

PHASE 1 : CANDIDATURE (PRÉ-REQUIS ET PUBLIC CONCERNÉ)

S'agissant des étudiants ayant validé le master 1 de la mention Mathématiques de l'Université de Lille, l'accès au master 2 Mathématiques parcours Recherche est de droit ; il vous appartiendra donc de procéder directement à votre inscription administrative (cf phase 2).

S'agissant des étudiants ayant validé un autre master 1 d'un parcours national de master dans une mention compatible (Mathématiques fondamentales ou appliquées) ou un diplôme à l'étranger (hors procédure Campusfrance), l'accès en master 2 Mathématiques parcours Recherche se fait par sélection sur dossier, suivi le cas échéant d'un entretien de motivation. **Toute candidature doit passer par la plateforme ecandidat :**

https://ecandidat.univ-lille.fr/

PHASE 2 : INSCRIPTION

Une fois que la décision d'acceptation dans la formation a été notifiée, l'**inscription administrative** se fait au début de l'année universitaire (le calendrier est en ligne sur le site de l'université de Lille : https://www.univ-lille.fr/etudes/candidater-sinscrire/) auprès des services administratifs de l'université.
Elle sera complétée, à la rentrée, par **l'inscription pédagogique** qui permet d'établir le contrat pédagogique de chaque étudiant et de l'inscrire aux examens correspondants (se rapprocher du secrétariat pédagogique).

ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT

SEMESTRE 3

BCC Maîtriser les concepts des mathématiques (Niveau approfondi 2) (Choix de 3 UE fondamentales parmi 7 dont au plus une UE de méthodes numériques)	Algèbre approfondie	9 ECTS
	Analyse approfondie	9 ECTS
	Géométrie approfondie	9 ECTS
	Introduction aux EDP non-linéaires	9 ECTS
	Probabilités approfondies	9 ECTS
	Méthodes numériques pour les EDP	9 ECTS
	Méthodes numériques pour les Probas-Stats	9 ECTS
BCC S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel	Séminaire d'étudiants en anglais	3 ECTS

SEMESTRE 4

BCC S'initier à la recherche dans le domaine des mathématiques (Choix de 2 UE parmi 7)	Cours approfondi de mathématiques pures 1	9 ECTS
	Cours approfondi de mathématiques pures 2	9 ECTS
	Cours approfondi de mathématiques pures 3	9 ECTS
	Cours approfondi en analyse numérique et EDP 1	9 ECTS
	Cours approfondi en analyse numérique et EDP 2	9 ECTS
	Cours approfondi en probabilités et statistiques 1	9 ECTS
	Cours approfondi en probabilités et statistiques 2	9 ECTS
BCC S'initier aux outils des mathématiques et à la médiation scientifique en milieu professionnel	Mémoire de recherche (possibilité de faire un stage en plus du mémoire)	12 ECTS

PROGRAMME DES COURS

2023 - 2024

- **S3 : Algèbre approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

Le sujet principal de ce cours est l'algèbre commutative, c'est-à-dire la théorie des anneaux et ses applications. Les deux tiers du cours seront consacrés à l'étude des notions et structures fondamentales du domaine. Le tiers restant sera consacré à des thèmes d'approfondissement ou à des applications. Le plan ci-dessous fourni une liste de sujets d'approfondissement possibles. Ces approfondissements pourront être traités en cours ou faire l'objet d'exposés d'étudiants. Les choix seront faits en fonction des projets des étudiants. Il s'agira de faire la jonction avec les cours du second semestre ou d'apporter des compléments de connaissances.

- Notions fondamentales
    - Anneaux et idéaux
      – Définition de la structure et exemples (révisions et compléments), anneaux principaux et euclidiens, anneaux factoriels.
      – Anneaux noethériens. Le théorème de la base de Hilbert
      – Idéaux premiers et maximaux. Dimension de Krull d'un anneau
    - Modules sur les anneaux
      – Définition de la structure et exemples. Opérations sur les modules. Modules noethériens
      – Présentation des modules par générateurs et relations. Syzygies et résolutions
      – Classification des modules de type fini sur un anneau principal
    - Anneaux et modules de fractions, localisation
- Thèmes d'approfondissement
    - Bases de Gröbner et méthodes effectives dans les anneaux de polynômes. Algorithme de Buchberger. Applications au calcul des syzygies
    - Introduction à la géométrie algébrique. Nullstellensatz. Faisceaux et variétés algébriques. Etude des ´ courbes algébriques
    - Etude des anneaux d'entiers de corps de nombres. Structure d'anneau de Dedekind. Unités et groupes de classes d'idéaux dans les anneaux d'entiers de corps de nombres
    - Nombres p-adiques. Construction. Lemme de Hensel. Groupe des unités. Théorème d'Hasse-Minkowski et principe local-global.
    - . . .

Bibliographie

[1] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald. Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley publishing co., 1969.

[2] D. Eisenbud. Commutative algebra with a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, 150. Springer-Verlag, 2004.

[3] W. Fulton. Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry. W.A. Benjamin inc., 1969.

[4] D. Perrin. Géométrie algébrique. Une introduction. Savoirs Actuels. InterEditions, Paris. CNRS Editions, Paris, 1995.

[5] P. Samuel. Théorie algébrique des nombres, Hermann, Paris, 1967.

[6] J.-P. Serre. Cours d'arithmétique. Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

Evaluation
Le contrôle continu (CC) comportera un examen partiel de 2h et un exposé. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1, (Ex1+CC)/2).

- **S3 : Analyse approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

➢ Partie I (24h CM - 8h TD)

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :

- Convergence faible (et préfaible) dans le cadre des espaces de Banach, exemple des mesures complexes comme dual de C(K) (théorème de Riesz).
- Réflexivité, étude d'exemples classiques (espaces de suites, espaces Lp).
- Espaces de Fréchet, exemples de $C^\infty(\Omega)$, $Hol(\Omega)$, S(Rn), distributions, etc.
- Théorème de Paley-Wiener (Fourier complexe).
- Equations différentielles complexes et fonctions spéciales.
- Fonctions harmoniques.
- Espaces de Hilbert de fonctions analytiques sur un ouvert de C ou Cn, noyau reproduisant, exemples (Hardy, Bergman, Dirichlet).
- Opérateurs sur les espaces de Hilbert, opérateurs à noyau, compacts.
- Valeurs propres et singulières des opérateurs.

➢ Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.

Bibliographie
[1] H. Brézis, Analyse Fonctionnelle - Théorie et Applications, Masson.
[2] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer.
[3] J. Cerda, Linear Functional Analysis, gsm 116, AMS.
[4] F. Hirsch, G. Lacombe, Eléments d'analyse fonctionnelle, Dunod.
[5] W. Rudin, Functional Analysis, Mc Graw Hill.
[6] D. Li, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, Ellipses.

Evaluation
Le contrôle continu (CC) comportera trois devoirs à la maison. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1, (Ex1+CC)/2).

- **S3 : Géométrie approfondie – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

➢ Partie I (24h CM - 8h TD)

L'enseignant choisira 6 thèmes cohérents parmi les 9 suivants :

- Sous-variétés de Rn.
- Variétés abstraites.
- Constructions de variétés (affines, projectives, actions de groupes).
- Formes différentielles sur les variétés. Différentiation. Lemme de Poincaré.
- Intégration des formes différentielles. Formule de Stokes.
- Lemme de Sard, degré.
- Fibrés vectoriels. Classification des fibrés sur S1 et S2.
- Cohomologie de de Rham.

- Indices des champs de vecteurs et nombre d'Euler. Formule de Hopf.
- Partie II (12h CM - 4h TD) La deuxième partie du programme sera établie en fonction des options offertes au second semestre.

Bibliographie

[1] Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, EDP Sciences 2010.
[2] Godbillon, Eléments de topologie algébrique, Hermann 1998.
[3] Chavel, Riemannian Geometry : a modern introduction, Cambridge University Press 2006.
[4] Bott-Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer 1982.
[5] Hirsch, Differential Topology, Springer, 1976.

Evaluation

Le contrôle continu (CC) sera un examen partiel de 2h. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S3 : Introduction aux EDP non-linéaires – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Espaces de Sobolev
  Inégalité de Poincaré. Théorèmes de trace et de recollement. Formule de Green. Injections de Sobolev. Théorème de Rellich.
- Etude théorique de problèmes elliptiques
  Théorème de Lax-Milgram, formulation variationnelle. Principe du maximum, régularité. Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur elliptique. Méthode de sur et sous solutions.
- Problèmes paraboliques
  Existence et unicité. Principe du maximum, régularité. Méthode de sur et sous solutions.
- Théorèmes de point fixe Thormes de Banach, Brouwer et Schauder.
  Applications aux EDP non linéaires.
- Equations de transport Solutions classiques, solutions faibles.
  Méthode des caractéristiques, solutions entropiques. Résolution du problème de Riemann. Application à l'équation de Burgers et au trafic routier.

Bibliographie

[1] R. Adams, J. Fournier, Sobolev spaces (second edition), Elsevier.
[2] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, V. 19.
[3] M. E. Taylor, Partial Differential Equations I, II, III Applied Mathematical Sciences.
[4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Application, Dunod Université.
[5] D. Serre, Systèmes de lois de conservation, tomes i et ii, Cassini, 1996.
[6] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer.

Evaluation

Le contrôle continu (CC) sera un examen partiel de 2h. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S3 : Probabilités approfondies – 36h de CM et 12h de TD**

Programme

- Processus stochastiques : théorème de Kolmogorov (admis), processus gaussiens, mouvement brownien, modification continue, propriétés des trajectoires.
- Introduction aux équations différentielles stochastiques : intégrale de Wiener, exemples simples d'EDS.
- Processus de Markov à sauts en temps continu : générateur, liens avec les chaînes de Markov, processus de Poisson, files d'attente.
- Inégalités de concentration : inégalités de Chernoff, Hoeffding, Bernstein, etc, applications.
- Grandes déviations : théorème de Cramer, principe de grandes déviations.

Bibliographie

[1] Bouleau, Processus Stochastiques et applications, Hermann.
[2] Claude Dellacherie, Pierre-Andre Meyer. Probabilités et potentiels. Hermann, 1975.
[3] D. Revuz et M. Yor, Continuous Martingales and Brownian motion, Springer.
[4] Karatzas et Shreeve, Brownian motion and stochastic calculus, Springer.
[5] I Florescu et C. Tudor, Handbook of Probability, Wiley.

Evaluation

Le contrôle continu (CC) sera un examen partiel de 2h. L'examen final (Ex1) de première session sera d'une durée de 3h. La note de l'UE sera donnée par la formule max(Ex1,(Ex1+CC)/2).

- **S3 : Méthodes numériques pour les EDP - 20h de CM et 46h de TD**

Programme

Cette unité pédagogique est constituée de deux modules : Outils informatiques en en calcul scientifique et Finite elements methods.

- ➢ Partie I (36h TD) : Outils informatiques en calcul scientifique
- Prise en main de python : rappels et compléments.
- Résolution de systèmes linéaires : méthodes directes, méthodes itératives.
- Méthodes de calcul de valeurs propres-vecteurs propres.
- Résolution d'équations non linéaires.
- Résolution approchée de l'équation de la chaleur.
- Différences finies pour l'approximation d'une équation elliptique 1D.
- Différences finies pour la résolution approchée de l'équation de la chaleur.
- Partie II (20h CM – 10h TD) : Finite elements methods
- The aim of this course is to acquire the theoretical and practical backgrounds for the numerical approximation of (systems of) PDEs of elliptic, or parabolic types using Finite Element (FE) Methods. Content :
- Variational formulation of elliptic PDEs: strong/weak solutions; derivation of a variational formulation; well-posedness (coercive case; Lax-Milgram); equivalence with the strong form; treatment of different types of data (variable coefficients, homogeneous/non-homogeneous cases) and boundary conditions (pure Dirichlet, pure Neumann, mixed-type, Robin-type).
- Variational approximation of elliptic problems: general idea, vocabulary; well-posedness (matricial viewpoint); Céa's lemma (conforming case); general convergence theorem.

- P1/P2 FE in 1D : definition of a FE ; definition of the reduction, reconstruction, and interpolation operators; shape functions; stiffness and mass matrices computation; quadrature formulas (Newton-Cotes, Gauss-Legendre); imposition of boundary conditions; convergence theorems.
- P1/P2 /Q1 FE in 2/3D : notion of admissible mesh; barycentric coordinates; stiffness and mass matrices computation; assembly procedure; cubature formulas; convergence theorems
- Implementation of a 2D P1 FE method in C++ : use of Gmsh (mesher), and of various libraries (improved standard, linear algebra, visualization...); generic and object-oriented programming.
- Approximation of parabolic problems: diagonalization of the heat operator; Euler/FE time/space schemes (explicit and implicit versions); convergence theorems; CFL condition; mass lumping; implementation

Bibliographie

[1] G. Golub et C. Van loan : Matrix Computations, Johns Hopkins University Press
[2] G. Allaire et S.M. Kaber : Algèbre Linéaire Numérique. Cours et exercices, Paris Ellipses
[3] J.P. Demailly : Analyse Numérique et Equations Différentielles, EDP Sciences, Eyrolles
[4] P. Lascaux et R. Théodor : Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur, Dunod
[5] J.-B. Hiriart-Urruty : Optimisation et Analyse Convexe (résumé de cours, exercices et problèmes corrigés), editions EDP Sciences
[6] L. Di Menza : Analyse Numérique des Equations aux dérivées partielles, Cassini
[7] B. Lucquin : Equations aux dérivées partielles et leurs approximations, Ellipses
[8] E. Hubert et J. Hubbard : Calcul Scientifique, Vuibert
[9] J.-E. Rombaldi : Interpolation et Approximation (cours et Exercices Résolus), Vuibert
[1] A. Quarteroni, P. Gervasio, F. Saleri: Calcul Scientifique (cours et exercices corrigés), Springer
[10] W. Gautschi: Numerical Analysis, BirkhäuserT. Gordon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul Scientifique, ISTE Editions
[11] G. Allaire : Numerical Analysis and Optimisation, Oxford University Press

Evaluation

Pour la partie I, le contrôle continu (CC) sera constitué d'évaluations de projets tout au long du semestre. L'examen final (Ex1) durera 3h et la note de l'EC sera (Ex1+CC)/2.
Pour la partie II, la note de CC comportera une note de TP, une note de DM et une note d'exposé d'articles. L'examen final (Ex1) durera 3h et la note de l'EC sera (Ex1+CC)/2.
La note de l'UE sera la moyenne des deux notes.

- **S3 : Méthodes numériques pour les Probas-Stats - 20h de CM et 56h de TD**

Programme

Cette unité pédagogique est constituée de deux modules : Outils informatiques en Proba-Stats et Théorie de l'apprentissage.

- ➢ Partie I (36h TD) : Outils informatiques en Proba-Stats
- Estimation paramétrique, intervalle de confiance.
- Méthodes de Monte-Carlo.
- Fonction de répartition empirique.
- Processus de Poisson.
- Chaînes de Markov.

- Partie II (20h CM – 20h TD) : Théorie de l’apprentissage
  L'objectif de ce cours est de savoir calculer des bornes sur les risques théoriques des méthodes d’apprentissage.
- Rappel sur les inégalités de concentration
- Risque théorique et empirique en apprentissage
- Nombres de croissance et dimension de Vapnik-Chervonenkis
- Complexité de Rademacher
- Nombres de couverture et dimension de pulvérisation

Bibliographie

[1] Processus de Markov et Applications. Algorithmes, réseaux, génome et finance. Etienne Pardoux.
[2] Exercice de probabilités : Licence - Master - Ecole d'ingénieurs. Marie Cottrell, Valentine Genon-Catalot, Christian Duhamel et Thierry Meyre.
[3] Statistique mathématique en action. Vincent Rivoirard et Gilles Stoltz.

Evaluation
La partie I sera évaluée par un examen final de 3h. La partie II également. La note de l’UE est la moyenne des deux notes.

- **S3 : Séminaire d’étudiants en anglais – 24h de TD**

Programme
Le séminaire d'étudiants comprend des séances en Anglais basées sur la lecture de livres de mathématiques ou d'articles de recherche. Les étudiants sont amenés à faire des exposés en Anglais.
Evaluation
L’évaluation sera basée sur un exposé et un mémoire en anglais rendu pendant le semestre.

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 1 : Théorie spectrale des opérateurs- 32h de CM et 8h de TD**

Programme

Objectifs du cours. Le but de ce cours, qui est la suite d’une partie du cours d’analyse approfondie du premier semestre, est de présenter plusieurs notions de théorie spectrale d’opérateurs linéaires et continus, agissant sur des espaces de Banach ou de Hilbert. Les notions de spectre de d’image numérique seront au centre de ce cours. Une attention particulière sera accordée aux exemples : opérateurs de multiplication, de composition, l’opérateur de décalage (le “shift”) et ses variantes, opérateurs sur les espaces de Hardy, Bergman ou Dirichlet, les opérateurs de Bishop, Cesàro ou Volterra, les transformées de Fourier et de Hilbert, les opérateurs de Toeplitz et Hankel, etc.

Bibliographie

[1] E. Brian Davies, Linear Operators and their Spectra, Cam bridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge Univ. Press, 2007

[2] Stephan Ramon Garcia, Javad Mashreghi, and William T. Ross, Operator Theory by Example, Oxford Univ. Press, 2023

[3] K.E. Gustafson, D.K.M. Rao,. Numerical Range. The Field of Values of Linear Operators and Matrices, Universitext, Springer-Verlag, 1997.

[4] Sz.-Nagy, Bela; Foias, Ciprian; Bercovici, Hari; Kérchy, ´ Laszl ´ o´, Harmonic Analysis of Operators on Hilbert space. Second edition. Revised and enlarged edition. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2010.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement

- **S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 2 : L'hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis- 32h de CM et 8h de TD**

Présentation

L'objectif de ce cours est de donner une introduction à la géométrie algébrique et arithmétique. Plutôt que de développer les fondations de manière exhaustive, on se propose de décrire les ingrédients nécessaires à la compréhension de la preuve d'André Weil du résultat en titre faisant intervenir la théorie de l'intersection sur les surfaces algébriques.
Le résultat visé est le suivant :

Théorème 1 (André Weil 1940) *Soit C une courbe (projective, lisse, de genre g) définie sur le corps fini $\mathbb{F}_q$, et pour $n \geq 1$ soit N_n le nombre de points de C dans $\mathbb{F}_{q^n}$. On note $Z(C,T) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} N_n \frac{T^n}{n}\right)$ la fonction zêta de Hasse–Weil de C. Alors :*

Il existe des entiers algébriques $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2g}$ de module $|\alpha_i| = \sqrt{q}$ tels que

$$Z(C,T) = \frac{(1-\alpha_1 T)\cdots(1-\alpha_{2g}T)}{(1-T)(1-qT)} .$$

De plus l'équation fonctionnelle suivante est vérifiée :

$$Z(C,T) = q^{g-1}T^{2g-2}Z(C, \frac{1}{qT}) .$$

Pré-requis

Il semble préférable, même si pas indispensable, d'avoir au préalable suivi un cours de théorie de Galois (par exemple le cours d'algèbre au S1) et/ou un cours d'algèbre commutative et de théorie des nombres (tel le cours d'algèbre au S3). On ne supposera aucun pré-requis de géométrie algébrique.

Plan

On se propose de suivre l'approche et le plan de [2].
1. Introduction : fonction zêta et hypothèse de Riemann
2. Inégalité de Hasse-Weil, genre
3. Variétés affines
4. Variétés projectives
5. Fonctions régulières
6. Lissité, espace tangent
7. Le théorème de Riemann-Roch
8. Dualité de Serre

9. Rationalité et équation fonctionnelle
10. Théorie de l'intersection sur les surfaces
11. Preuve de l'inégalité de Hasse-Weil

Références

[1] Marc Hindry, La preuve par André Weil de l'hypothèse de Riemann pour une courbe sur un corps fini, http://www.math.polytechnique.fr/xups/textes-provisoires12/hindry.pdf
[2] Bas Edixhoven and Lenny Taelman, Algebraic Geometry, http://pub.math.leidenuniv.nl/~edixhovensj/teaching/2010-2011/AG-mastermath/ag.pdf

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement

S4 : Cours approfondi de mathématiques pures 3 : Topologie des hypersurfaces projectives - 32h de CM et 8h de TD

Programme

Ce cours spécialisé est une introduction à l'étude de la topologie des hypersurfaces singuliers. Une variété de problèmes de recherche seront introduite également. Plusieurs sujets de thèse de doctorat sont possibles à l'issue de ce cours.
On commencera avec un "crash course" sur les courbes planes, pour ensuite passer à des méthodes spécifiques d'étude de la topologie des hypersurfaces projectives.
La programme proposé permet d'aborder des thématiques de recherche en lien avec la géométrie algébrique, avec des ramifications actuelles comme : hypersurfaces homaloïdales, topologie des applications polynomiales, invariants locaux des singularités. On envisage d'expliques quelques applications dans optimisation.

Pré-requis

Ce cours s'appuie en particulier sur les cours de Géométrie Différentielle et Topologie Algébrique du M1, et de Géométrie du M2.

Les postulants pourront participer à l'Ecole d'été de recherche "Singularités et Applications" que j'organiserai en juin 2023 (voir sur ma page web), ainsi qu'à une école similaire que j'organiserai en septembre 2024 en Roumanie.

Eléments du programme :
(1) Courbes algébriques planes, bases de la topologie : la classification topologique, le genre, Riemann-Hurwitz, relation entre degré et genre, courbes singulières, résolution.
(2) Invariants algébriques et topologiques attachés aux singularités : algèbre de Milnor, fibration de Milnor.
(3) Homologie des hypersurfaces projectives. Géométrie énumérative. Formules de Plücker.
(4) La méthode des courbes polaires. Le degré polaire. Arrangements d'hyperplans.
(5) Applications au "degré de la distance euclidienne" (en anglais : "Euclidean distance degree").

Bibliographie

[1] E. Brieskorn, H. Knörrer, Plane algebraic curves. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.
[2] A. Dimca, Singularities and topology of hypersurfaces, Universitext. Springer-Verlag, New York, 1992.

[3] W. Ebeling, Functions of several complex variables and their singularities. Graduate Studies in Mathematics, 83. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
[4] G. Fischer, Plane algebraic curves, Student Mathematical Library, 15. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
[5] M. Goresky, R. MacPherson, Stratified Morse theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 14. Springer-Verlag, Berlin, 1988. xiv+272 pp.
[6] Laurenţiu Maxim, Mihai Tibăr, Euclidean distance degree and limit points in a Morsification, arXiv:2210.06022.
[7] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies 61, Princeton 1968.
[8] D. Siersma, M. Tibăr, Vanishing homology of projective hypersurfaces with 1-dimensional singularities Europ. J. Math. 3 (2017), 565-586.
[9] D. Siersma, J.H.M. Steenbrink, M. Tibăr, On Huh's conjectures for the polar degree, J. Algebraic Geometry 30 (2021) 189-203.
[10] M. Tibăr, Complements of hypersurfaces, variation maps and minimal models of arrangements, dans: Bridging Algebra, Geometry and Topology. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Vol. 96, pp. 281-289, Springer Verlag 2014.
[11] M. Tibăr, Polar degree of singular hypersurfaces. Chapitre de livre en préparation.

Quelques pages d'internet dans la thématique "Hypersurfaces singulières":

∆ CIMPA Research School "Singularities and Applications",
Sao Carlos, Brésil, juillet 2021 et juillet 2022 https://cimpa.icmc.usp.br/
Le site web contient des liens vers une librairie très riche de cours, en fichiers PDF ainsi que des vidéos youtube
https://www.youtube.com/@singularitygroupinsaocarlo1122/streams, sur différents thématiques en lien avec ce cours de Master 2.
∆ Dodécaèdre étoilé, sculpture dans un lieu public à Vienne, Autriche, réalisée à base d'une équation en trois variables. Combien de singularités ?
https://www.dodekaederstern.cc/
∆ The "Barth sextic" is a sextic surface in complex three-dimensional projective space having the maximum possible number of ordinary double points, namely 65. The surface was discovered by W. Barth in 1994, and is given by the implicit equation:
4(ϕ2x2 − y2)(ϕ2y2 − z2)(ϕ2z2 − x2) − (1 + 2ϕ)(x2 + y2 + z2 − w2)2w2 = 0
where ϕ is the golden ratio. https://en.wikipedia.org/wiki/Barth_surface
∆Gallérie de singularités de surfaces algébriques
https://homepage.univie.ac.at/herwig.hauser/gallery.html
∆ No Art, just Math http://blog.mo-labs.com/

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi en analyse numérique et EDP 1 : Outils mathématiques pour l'information quantique- 32h de CM et 8h de TD**

Programme
Un ordinateur exploitant subtilement les principes de base de la mécanique quantique pourra être spectaculairement plus efficace qu'un ordinateur classique, comme l'ont démontré théoriquement Shor (1994) et Grover (1996), en proposant des algorithmes

quantiques capables de factoriser un très grand nombre premier très rapidement ou de repérer très rapidement une donnée dans une très grande liste non-organisée. Ces résultats ont donné lieu à une nouvelle science, à la jonction de l'informatique, de la théorie de l'information et de la mécanique quantique : l'information quantique, qui englobe notamment la cryptographie quantique et le calcul quantique. Ses promesses, non totalement tenues pour l'instant, ont également attiré les investisseurs privés comme publics mondialement, vers la technologie quantique. Le but de ce cours est de fournir une introduction à quelques aspects de l'information quantique, en présentant notamment ses outils mathématiques. De ce point de vue, il s'agira d'un cours d'analyse, combinant analyse spectrale, analyse fonctionnelle, théorie des opérateurs et des algèbres d'opérateurs, ainsi que les probabilités. Le cours sera illustré avec des programmes en Qiskit, le "open source" de IBM qui permet de simuler des programmes quantiques. Les connaissances acquises en Licence et Master 1 dans ces disciplines suffiront comme prérequis et le cours s'inscrit aussi bien dans un parcours orienté vers les mathématiques pures que appliquées. Un polycopié sera mis à disposition.

Programme prévisionnel :

- Eléments de la mécanique quantique (8h CM+2h TD)
  - Espace des états = espace de Hilbert
  - Observables = opérateurs auto-adjoints
  - Observables (in-)compatibles = opérateurs (ne) commutant (pas)
  - Principe d'incertitude = transforée de Fourier
  - Etats = opérateurs à trace positifs
  - Mélange statistique, états pures et mixtes = combinaison convexe, points extrémaux Systèmes composites = produits tensoriels
  - Dynamique = flot unitaire = équation de Schrödinger
  - Symétries = représentation unitaire de groupe
  - Mesure physique = projection
- Intrication (8h CM+2h TD)
  - Etats séparables et intriqués
  - Le théorème "no cloning" (Zurek, Wootters, Dieks 1982)
  - La décomposition de Schmidt
  - La purification = la représentation GNS
  - Mesures d'intrication bi-partites, entropies de von Neumann
- Portes quantiques et algorithmes quantiques (10h CM + 2hTD)
  - Portes quantiques binaires, générales, universelles
  - Circuits quantiques
  - Cryptographie quantique : le protocole BB84
  - Algorithmes quantiques : Deutsch, Schor, Grover
- Opérations quantiques (6h CM+2hTD)
  - Application complètement positive sur un espace de Hilbert
  - Equation maîtresse quantique, générateur de Lindblad
  - Décohérence et approche à équilibre

Bibliographie

[1] [CTLD97] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Laloe, and Franck Diu. Mécanique Quantique I. Hermann, Paris, 1997.

[2] [GMS16] Ved Prakash Gupta, Prabha Mandayam, V.S. Sunder. The Functional Analysis of Quantum Information Theory. Springer, LNP, 2015, https://arxiv.org/pdf/1410.7188.pdf

[3] [Ha18] Masahito Hayashi. Quantum information theory : mathematical foundation Springer, 2017
[4] [NiCh00] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge University Press, 2010.
[5] [RS75] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975
[6] [RS78] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
[7] [RS80] Michael Reed and Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. I. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, second edition, 1980. Functional analysis.
[8] [S19] Wolfgang Scherer Mathematics of quantum computing. Springer, 2019

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement

- **S4 : Cours approfondi en analyse numérique et EDP 2 : Ondes à la surface de l'eau- 32h de CM et 8h de TD**

Il y a plus d'un siècle, John Scott Russell a observé une vague se déplaçant à vitesse constante à la surface d'un canal, en gardant sa forme initiale. Nous nous intéressons ici aux modèles mathématiques dispersifs pour les ondes à la surface de l'eau dans un canal peu profond et aux solutions particulières observées par JS Russel, les ondes progressives. Ces modèles pour ondes longues, dérivées des équations d'Euler, sont les modèles de type Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x = 0,$$

ou la version régularisée de Benjamin, Bona et Mahony

$$u_t + u_x - u_{txx} + uu_x = 0.$$

L'équilibre subtil entre les effets dispersifs linéaires et les effets non linéaires permet l'existence de ces ondes voyageuses. Le cours d'analyse appliquée est organisé comme suit
• Nous discutons de la dérivation des modèles à partir des équations d'Euler.
• Nous traitons le problème de Cauchy pour ces équations, en mettant en évidence les outils dispersifs nécessaires pour analyser le problème.
• Nous nous concentrons sur l'existence et la stabilité des solutions dites ondes progressives pour ces équations.
Les connaissances préalables requises sont des notions de base en analyse. Les outils d'analyse fonctionnelle à utiliser seront introduits au fur et à mesure du cours.

Bibliographie
[1] J. L. Bona, M. Chen, and J.-C. Saut, Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media I: Derivation and the linear theory, J. Nonlinear Sci., 12 (2002), pp. 283 318.

[2] A. de Bouard, J.M. Ghidaglia, J. C. Saut Histoires d'eau, histoires d'ondes, Images des mathématiques, 95, (1995), 23-30.
[3] F. Linares, G. Ponce, Introduction to nonlinear dispersive equations, Universitext book series, Springer, 2009.

Evaluation
Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.

- **S4 : Cours approfondi en probabilités et statistiques 1 : Quelques modèles de physique statistique - 32h de CM et 8h de TD**

Présentation
La physique statistique a pour but de décrire le comportement et l'évolution *macroscopique*, c'est-à-dire à notre échelle, de systèmes physiques constitués d'un très grand nombre de particules, à partir de leur description *microscopique*. Qu'elle soit basée sur la mécanique classique ou la mécanique quantique, la description à l'échelle microscopique revêt le plus souvent un caractère aléatoire tandis que le comportement macroscopique global est le plus souvent déterministe, mais avec des fluctuations qui peuvent être encore aléatoires. L'objet de ce cours est de présenter quelques modèles de natures différentes et dont l'étude fait appel à des outils variés. Il sera découpé en deux parties principales.

Programme
1/ Introduction à l'étude des gaz sur réseaux
Le but de cette partie est d'offrir une introduction aux gaz sur réseau, ou les particules se déplacent stochastiquement sur une grille. Nous aborderons le formalisme mathématique pour comprendre de tels systèmes et leur limite d'échelle macroscopique. On se basera notamment sur un exemple classique, le SSEP, ou Processus d'Exclusion Simple Symétrique. Cet exemple posera les bases pour parler d'autres modèles classiques, comme les processus de zéro range, et pour comprendre l'impact de l'ajout de dynamiques de bord et/ou d'asymétrie dans le saut des particules.
Le SSEP est un exemple simple de *gaz sur réseau*. On peut le décrire informellement en dimension 1 de la manière suivante : on voit $\mathbb{Z}$ comme un réseau de dimension 1, chaque entier $x \in \mathbb{Z}$ est un *site du réseau*.
À un instant t donné (discret ou continu), chaque site x du réseau peut être soit occupé par une particule •, soit être vide *o*. Décrivons par exemple le SSEP en temps discret, et supposons qu'à l'instant initial $t = 0$, il y ait un nombre fini de particules : à chaque instant $t > 0$, $t \in$ N, on choisit une particule au hasard, notons x le site sur lequel elle se trouve. La configuration à l'instant $t + 1$ est alors donnée par la configuration à l'instant t après la mise à jour suivante : la particule au site x a sauté sur le site $x - 1$ avec probabilité 1/2, ou sur le site $x+1$ avec probabilité 1/2. Si la particule essaie de sauter sur un site déjà occupé, on annule le saut (ou on inverse les deux particules, ce qui revient au même), auquel cas la configuration aux temps t et $t+1$ sont identiques. On définira proprement le SSEP en temps continu, et on étudiera certaines de ses propriétés microscopiques et macroscopiques.

On parlera en particulier du lien entre le SSEP et l'équation de la chaleur

$$\partial_t \rho(t,u) = \partial_u^2 \rho(t,u), \qquad (t,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$$

qui le caractérise au niveau macroscopique. On abordera ensuite les différences entre le SSEP et d'autres systèmes de particules classiques, notamment le processus dit de zéro-range, où plusieurs particules peuvent cohabiter sur le même site.
On pourra se référer à [1, 2].

2/ Introduction aux processus ponctuels déterminantaux

Initialement considérés pour modéliser des fermions en mécanique quantique, les *processus ponctuels déterminantaux* ont été fortement popularisés ces vingt dernières années en raison de leur apparition assez surprenante dans divers champs des mathématiques et de la physique. Pour citer quelques exemples [4, 5] : Valeurs propres de matrices aléatoires, diffusions conditionnées à ne pas s'intersecter, zéros de fonctions analytiques aléatoires, pavages aléatoires, plus grande sous-suite croissante d'une permutation aléatoire et problème d'Ulam, représentations irréductibles du groupe symétrique sous la mesure de Plancherel, arbres couvrants uniformes d'un graphe.
Plus impressionnant encore, les mêmes processus ponctuels déterminantaux (*noyau sinus*, *noyau de Airy*/*loi de Tracy-Widom*, pour citer les plus connus), apparaissent systématiquement comme objets limites dans l'étude locale de nombreux systèmes de particules aléatoires : ce sont les fameux *phénomènes d'universalité* en matrices aléatoires, qui en fait dépassent largement le cadre des seuls modèles matriciels [3].
Le but de cette partie est d'offrir à l'étudiant à une introduction aux processus ponctuels déterminantaux en abordant à la fois des généralités théoriques et l'étude d'exemples concrets.

Bibliographie

[1] Kipnis C. and Landim C. (1999) : *Scaling limits of interacting particle systems.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **320**, Springer, New York.
[2] Liggett T. M. (1985) : *Interacting particle systems*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **276**, Springer, New York.
[3] P. Deift, *Universality for mathematical and physical systems*, International Congress of Mathematicians. Vol. I, 125–152, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
[4] J. B. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres and B. Virág, *Determinantal processes and independence*, Probab. Surv. 3 (2006), 206–229.
[5] K. Johansson, *Random matrices and determinantal processes*, Mathematical statistical physics, 1–55, Elsevier B. V., Amsterdam, 2006.

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.

S4 : Cours approfondi en probabilités et statistiques 2 : Applications modernes de la théorie des probabilités à intelligence artificielle : méthodes génératives en apprentissage profond - 32h de CM et 8h de TD

Programme

L'année 2022 a été témoin de progrès très importants en IA, avec l'émergence de modèles génératifs de très haute qualité. Ces modèles se basent sur des notions avancées de théorie des probabilités. L'objectif premier de ce cours est d'introduire les notions de théorie des probabilités et de physique sous-jacentes à ces développement de pointe en IA, en particulier en apprentissage profond. Le deuxième est de faire comprendre concrètement ces notions à l'aide de leur implémentation machine et de visualisation d'exemples. Un troisième est d'illustrer leur applicabilité. En particulier, les principales librairies d'apprentissage automatique seront utilisées (sciait-learn, pytorch, tensorflow). Outre les connaissances en théories des probabilités qu'il permettra d'acquérir, ce cours offrira un bagage technique susceptible d'intéresser des entreprises élargit le panel d'opportunités professionnelles à l'issue du master.

Plus précisément, les thèmes abordés seront :
Estimation Bayésienne,
Estimateur de maximum de vraisemblance
Algorithme EM (Estimation-Maximisation), Métropolis-Hasting, sampling de Gibbs
Entropie Croisée, distance de Kullback-Leibler
Calcul variationnel, Inférence variationelle
Transport optimal (distance de Wasserstein)

Applications :
Auto-encodeurs variationnels (VAE)
Modèles de diffusion (Dall-E, stable diffusion…)
Réseaux adversaires génératifs de Wasserstein (GANs)

Bibliographie

Quelques références pour avoir une idée des notions (sera complétée d'ici le début du cours)
https://towardsdatascience.com/variational-inference-c896668707aa
https://people.eecs.berkeley.edu/~jordan/papers/variational-intro.pdf
https://arxiv.org/pdf/2006.11239.pdf
https://arxiv.org/pdf/1601.00670.pdf
https://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_free_energy
http://www2.stat.duke.edu/~rcs46/modern_bayes17/lecturesModernBayes17/lecture-7/07-gibbs.pdf
https://openai.com/dall-e-2/
https://en.wikipedia.org/wiki/Stable_Diffusion
https://github.com/CompVis/stable-diffusion
https://en.wikipedia.org/wiki/Wasserstein_GAN
https://proceedings.mlr.press/v70/arjovsky17a.html

Evaluation

Les modalités du contrôle continu (CC) et de l'examen final de première session (EX1) seront précisées ultérieurement.